微分流形 Part 2

Differential Manifolds

涂轩丞

2026-01-16

目录

目 录

1 ▶ 张量代数

定义(双线性映射). 设V_1, V_2, W是线性空间，映射$B: V_1 \times V_2 \to W$是双线性的，若有

(i) 第一个位置的线性. $B(ku_1 + u_2, v) = kB(u_1, v) + B(u_2, v), \forall v \in V_2$.

(ii) 第二个位置的线性. $B(u, kv_1 + v_2) = kB(u, v_1) + B(u, v_2), \forall u \in V_1$.

则称B为从$V_1 \times V_2$到W的双线性映射.

记$\mathcal{L}(V_1, V_2; W)$为所有从$V_1 \times V_2$到W的双线性映射的集合, 则其自然是一个线性空间，我们可以自然定义其上面的加法和数乘, 即

$$(B_1 + B_2)(u, v) := B_1(u, v) + B_2(u, v), \tag{1}$$

$$(kB)(u, v) := kB(u, v). \tag{2}$$

类似地，可以定义多重线性映射空间$\mathcal{L}(V_1, \cdots, V_n; W)$.

定义(元素的张量积). 取上述的目标空间为$W = \mathbb{R}$, 即空间$\mathcal{L}(V_1, V_2; \mathbb{R})$, 下面构造属于该集合的映射. $\forall f \in V_1^*, g \in V_2^*$, 定义$f \otimes g : V_1 \times V_2 \to \mathbb{R}$为

$$(f \otimes g)(u_1, u_2) := f(u_1)g(u_2), \quad \forall u_1 \in V_1, u_2 \in V_2. \tag{3}$$

注意上述的双线性性质需要验证，从而$f \otimes g \in \mathcal{L}(V_1, V_2; \mathbb{R})$. 这来源于泛函$f, g$的线性性质.

引理(双线性). $V_1^* \times V_2^* \to \mathcal{L}(V_1, V_2; \mathbb{R})$的映射$(f,g) \mapsto (f \otimes g)$是双线性的.

证明： 只证第一个位置的线性. $f_1, f_2 \in V_1^*, g \in V_2^*, u \in V_1, v \in V_2$,

$$[(kf_1 + f_2) \otimes g](u,v) = (kf_1 + f_2)(u)g(v) = kf_1(u)g(v) + f_2(u)g(v) = (kf_1 \otimes g + f_2 \otimes g)(u,v). \tag{4}$$

■

注意上述的双线性性质也来源于泛函f, g的线性性质, 这说明纯张量$f \otimes g$可以被分解. 事实上, 任意张量都可以被分解，具体有下面的引理.

引理(构造性的扩张). $\{f \otimes g : f \in V_1^*, g \in V_2^*\}$张成了$\mathcal{L}(V_1, V_2; \mathbb{R})$.

证明： 设V_1的基为$\{e_i\}$, V_1^*的对偶基为$\{w^i\}$, 取V_2的基为$\{f_j\}$, V_2^*的对偶基为$\{\delta^j\}$. 则$w^i \otimes \delta^j$构成了$\mathcal{L}(V_1, V_2; \mathbb{R})$的基. 具体可以看出

$$\sum_{i,j} a_{ij} w^i \otimes \delta^j = 0 \Leftrightarrow \sum_{i,j} a_{ij} w^i \otimes \delta^j(u,v) = \sum_{i,j} a_{ij} w^i(u)\delta^j(v) = 0, \quad \forall u \in V_1, v \in V_2. \tag{5}$$

取$u = e_k, v = f_l$, 则RHS $= \sum_{i,j} a_{ij} w^i(e_k)\delta^j(f_l) = \sum_{i,j} a_{ij}\delta_k^i \delta_l^j = a_{kl} = 0, \forall k, l$, 从而线性无关.

下面证其张成性. 取$B \in \mathcal{L}(V_1, V_2; W)$, 首先令$B(e_i, f_j) = a_{ij}$, 下面证明$B = \sum_{i,j} a_{ij} w^i \otimes \delta^j$. 首先注意到两边都是双线性映射. 接下来同义反复证明其在基上面的作用即可，因为由双线性性质

$$B(u,v)=B\left(\sum_i u_i e_i,\sum_j v_j f_j\right)=\sum_{i,j} u_i v_j B(e_i,f_j). \tag{6}$$

∎

由上述构造性，我们得到一个推论

定理(维数等式). $\dim \mathcal{L}(V_1,V_2;\mathbb{R})=\dim(V_1^*)\dim(V_2^*)=\dim(V_1)\dim(V_2)$.

下面给出张量积的严格定义.

定义(集合的张量积). 称$\mathcal{L}(V_1^*,V_2^*;\mathbb{R})$为$V_1,V_2$的张量积，记为$V_1\otimes V_2$. 于是我们称$L(V_1,V_2;\mathbb{R})=V_1^*\otimes V_2^*$.

注意，两个空间的张量积，是其对偶空间乘积上的双线性映射形成的。由之前的证明，我们有如下的结论。

定理(张量积的基底). 取V_1,V_2的基底分别为$\{e_i\},\{f_j\}$, 则$V_1\otimes V_2$的基底为$\{e_i\otimes f_j\}$.

定理(一般双线性映射，泛性质). 设$B:V_1\times V_2\to W$是双线性映射, 则存在唯一的线性映射$\overline{B}:V_1\otimes V_2\to W$, 使得复合运算成立$B(u,v)=\overline{B}(u\otimes v)$

证明： 只需在$\{e_i \otimes f_j\}$上定义$\overline{B}$即可,并作线性延拓. 具体来说，令$\overline{B}(e_i \otimes f_j) = B(e_i, f_j)$, 且对任意的$t \in V_1 \otimes V_2$, 由张量积的基底表示，$t = \sum_{i,j} c_{ij}(e_i \otimes f_j)$, 于是可以定义$\overline{B}(t) = \sum_{i,j} c_{ij} B(e_i \otimes f_j)$. 自然地，$\overline{B}$是线性的.

下面只需验证$\overline{B}(u \otimes v) = B(u, v)$. 事实上, 给定$u = \sum_i u_i e_i, v = \sum_j v_j f_j$, 则

$$
\begin{aligned}
B(u, v) &= \sum_{i,j} u_i v_j B(e_i, f_j) \quad B\text{双线性} \\
&= \sum_{i,j} u_i v_j \overline{B}(e_i \otimes f_j) \quad \text{定义} \\
&= \overline{B}\left(\sum_{i,j} u_i v_j (e_i \otimes f_j)\right) \quad \overline{B}\text{线性} \\
&= \overline{B}\left(\left(\sum_i u_i e_i\right) \otimes \left(\sum_j v_j f_j\right)\right) \quad \text{张量积的双线性性} \\
&= \overline{B}(u \otimes v) \quad \text{定义}
\end{aligned} \tag{7}
$$

■

引理(典则同构). $(V_1 \otimes V_2)^* \cong V_1^* \otimes V_2^*$.

证明： 定义$\pi : V_1^* \otimes V_2^* \to (V_1 \otimes V_2)^*$，在纯张量$f \in V_1^*, g \in V_2^*$上,

$$\pi(f\otimes g)(u\otimes v)=f(u)g(v),\quad \forall u\in V_1, v\in V_2. \tag{8}$$

该映射的定义不依赖于V_1,V_2,V_1^*,V_2^*的基底选择，从而是典范的. 下面需要验证该映射是良定义的. 仍然利用线性延拓方法。也就是对于一般的线性组合形成的张量$B=\sum_i a_i f^i\otimes g^i$, 我们令

$$\pi(B)=\pi\left(\sum_i a_i f^i\otimes g^i\right)=\sum_i a_i\pi(f^i\otimes g^i). \tag{9}$$

从而$\pi(B)(u\otimes v)=\pi\left(\sum_i a_i f^i\otimes g^i\right)(u\otimes v)=\sum_i a_i\pi(f^i\otimes g^i)(u\otimes v)=\sum_i a_i f^i(u)g^i(v)$. 我们需要验证这里得到的结果与线性组合的表示无关. 设$B=\sum_j b_j\varphi^j\otimes\psi^j=\sum_i a_i f^i\otimes g^i$, 利用$V_1\otimes V_2$的基底表示，$f^i\otimes g^i=\left(\sum_l a_{il}w^l\right)\otimes\left(\sum_k b_{ik}\delta^k\right)=\sum_{k,l}\tilde{a}^i_{kl}w^k\otimes\delta^l$, 同理$\varphi^j\otimes\psi^j=\sum_{k,l}\hat{b}^j_{kl}w^k\otimes\delta^l$. 代入上式，比较基底系数可知$\sum_i a_i\tilde{a}^i_{kl}=\sum_j b_j\hat{b}^j_{kl}, \forall k,l$. 于是

$$\sum_i a_i f^i(u)g^i(v)=\sum_{k,l}\left(\sum_i a_i\tilde{a}^i_{kl}\right)w^k(u)\delta^l(v)=\sum_{k,l}\left(\sum_j b_j\hat{b}^j_{kl}\right)w^k(u)\delta^l(v)=\sum_j b_j\varphi^j(u)\psi^j(v). \tag{10}$$

这样便验证了良定义性. 单满性可以通过取基底验证。

■

之后，我们便基本上在纯张量上定义操作，一般都可以线性延拓到整个张量积空间上.

1. 多重张量积

类似地，我们可以定义多重张量积$V_1\otimes\cdots\otimes V_r:=\mathcal{L}(V_1^*,\cdots,V_r^*;\mathbb{R})$. 关于多重张量积，我们有

引理(结合律). $(V_1\otimes V_2)\otimes V_3\cong V_1\otimes V_2\otimes V_3$.

证明： 直接按照定义写开左边会比较繁琐. 这里我们定义$\pi:(V_1\otimes V_2)\otimes V_3\to V_1\otimes V_2\otimes V_3$为

$$\pi((v_1\otimes v_2)\otimes v_3)(f_1,f_2,f_3)=f_1(v_1)f_2(v_2)f_3(v_3),\quad \forall f_i\in V_i^*,i=1,2,3. \tag{11}$$

■

下面为了对称，$v\in V$, $f\in V^*$, 我们记$f(v)=\langle f,v\rangle$. 下面考虑一个有限维空间V的操作. 令$E_s^r(V)=\underbrace{V\otimes\cdots\otimes V}_{r个}\otimes\underbrace{V^*\otimes\cdots\otimes V^*}_{s个}$为$r$阶反变$s$阶协变张量空间.

取V的基$\{e_i\}$, V^*的基$\{w^i\}$, 则$e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_r}\otimes w^{j_1}\otimes\cdots\otimes w^{j_s}$为$T_s^r(V)$的基底. 事实上，$T_s^r(V)=\mathcal{L}\left(\underbrace{V^*,\cdots,V^*}_{r},\underbrace{V,\cdots,V}_{s};\mathbb{R}\right)$, 即

$$\left[e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_r}\otimes w^{j_1}\otimes\cdots\otimes w^{j_s}\right](f_1,\cdots,f_r,v_1,\cdots,v_s)=\langle e_{i_1},f_1\rangle\cdots\langle e_{i_r},f_r\rangle\langle w_{j_1},v_1\rangle\cdots\langle w_{j_s},v_s\rangle \tag{12}$$

于是对任意的$\varphi \in T_s^r(V)$, 有唯一的系数$\varphi^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}$使得

$$\varphi = \sum_{i_1,\cdots,i_r,j_1,\cdots,j_s} \varphi^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}\left(e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_r}\otimes w^{j_1}\otimes\cdots\otimes w^{j_s}\right). \tag{13}$$

为了坐标变换讨论的方便，我们引入 Einstein 求和约定，即当一个表达式中某个指标在上标和下标同时出现时，表示对该指标进行求和. 例如$a^i_j b^j_k = \sum_j a^i_j b^j_k$.

例(坐标变换). (i) **基之间的坐标变换.** 取V的两组基$\{e_i\}$, $\{\tilde{e}_i\}$, 且满足变换关系$\tilde{e}_j = a^i_j e_i$, 记$b^i_j = \left[a^i_j\right]^{-1}$, 即$a^i_j b^j_k = \delta^i_k$, $b^j_k a^i_j = \delta^i_k$. 于是我们有对偶基的变换关系$\tilde{w}^j = b^j_i w^i$. 这是因为对偶基的定义

$$b^i_j w^j(\tilde{e}_k) = w^i_j w^j\left(a^l_k e_l\right) = b^i_j a^l_k \delta^j_l = b^i_j a^j_k = \delta^i_k = \tilde{w}^i(\tilde{e}_k). \tag{14}$$

(ii) 取$\varphi \in T_s^r(V)$, 则其在两组基下的表示分别为

$$\varphi = \varphi^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}\left(e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_r}\otimes w^{j_1}\otimes\cdots\otimes w^{j_s}\right) = \tilde{\varphi}^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}\left(\tilde{e}_{i_1}\otimes\cdots\otimes \tilde{e}_{i_r}\otimes \tilde{w}^{j_1}\otimes\cdots\otimes \tilde{w}^{j_s}\right). \tag{15}$$

将(1)中结果$e_i = \left(a^j_i\right)^{-1}\tilde{e}_j = b^j_i \tilde{e}_j$, $w^j = \left(b^j_i\right)^{-1}\tilde{w}^i = a^j_i \tilde{w}^i$代入, 于是我们有坐标变换关系

$$\tilde{\varphi}^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s} = \varphi^{k_1\cdots k_r}_{l_1\cdots l_s} b^{i_1}_{k_1}\cdots b^{i_r}_{k_r} a^{l_1}_{j_1}\cdots a^{l_s}_{j_s}. \tag{16}$$

上面跟随基向量$e_i, \tilde{e}_i$之间的变换$a_{j_1}^{l_1}\cdots a_{j_s}^{l_s}$中的$s$便被称为**协变(co-variate)**.

例(典范同构). $V \otimes V^* \cong \mathcal{L}(V, V)$

证明: 定义$\varphi : V \otimes V^* \cong \mathcal{L}(V, V)$为$\varphi(u \otimes f)(v) = f(u)v$, 则这样的定义不合理。应该定义成$\varphi(u \otimes f)(v) = f(v)u$.

■

定义(张量的缩并(contraction)). 对于给定的两个指标i, j, 任取$\varphi \in V_s^r$, 定义映射$ct_{i,j} : V_s^r \to V_{s-1}^{r-1}$为

$$ct_{i,j}(\varphi) = \varphi_{b_1\cdots b_{j-1}eb_{j+1}\cdots b_s}^{a_1\cdots a_{i-1}ea_{i+1}\cdots a_r} e_{a_1} \otimes \cdots \otimes \hat{e}_{a_i} \otimes \cdots \otimes \hat{e}_{a_r} \otimes w^{b_1} \otimes \cdots \hat{w}^{b_j} \otimes \cdots \otimes w^{b_s} \tag{17}$$

注意这里的缩并并不依赖于基底的选择.

下面我们考虑张量积$T_r = T_r^0 = \underbrace{V^* \otimes \cdots \otimes V^*}_{r个} \cong \left(\underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{r个}\right)^* \cong \mathcal{L}\left(\underbrace{V, \cdots, V}_{r个}; \mathbb{R}\right)$上的作用.

当$r = 0$时，$T_0 = \mathbb{R}$; 当$r = 1$时，$T_1 = V^*$.

首先取S_r为r阶置换群，考虑S_r在T_r上的作用: $\forall \sigma \in S_r, \forall T \in T_r, X_i \in V$, 令$T_r$上的自同态群为

$$\sigma \circ T(X_1, \cdots, X_r) = T\left(X_{\sigma(1)}, \cdots, X_{\sigma(r)}\right). \tag{18}$$

于是$\sigma\circ T\in T_r$.

引理(σ作用的性质). (i) $\sigma: T_r\to T_r$是线性的. (ii) $(\sigma\circ\tau)\circ T=\sigma\circ(\tau\circ T)$

证明： (i)

$$\begin{aligned}\sigma(kT_1+T_2)(X_1,\cdots,X_r)&=(kT_1+T_2)\left(X_{\sigma(1)},\cdots,X_{\sigma(r)}\right)=kT_1\left(X_{\sigma(1)},\cdots,X_{\sigma(r)}\right)+T_2\left(X_{\sigma(1)},\cdots,X_{\sigma(r)}\right)\\&=k\sigma T_1(X_1,\cdots,X_r)+\sigma T_2(X_1,\cdots,X_r)\end{aligned}\tag{19}$$

(ii)

$$\sigma\circ(\tau\circ T)(X_1,\cdots,X_r)=\tau\circ T\left(X_{\sigma(1)},\cdots,X_{\sigma(r)}\right)=T\left(X_{\sigma\circ\tau(1)},\cdots,X_{\sigma\circ\tau(r)}\right)=(\sigma\circ\tau)\circ T(X_1,\cdots,X_r)\tag{20}$$

■

从而$S_r\times T_r\to T_r,(\sigma,T)\mapsto\sigma\circ T$为$S_r$在$T_r$上的表示. 也就是每一个$\sigma\in S_r$, 都对应一个自同构$L_\sigma: T_r\to T_r$, 记所有的$L_\sigma$组成的集合为$GL(T_r)$，即是$T_r$上所有可逆线性变换组成的群. 详细可见抽象代数中的表述. 从而映射$\varphi: S_r\to GL(T_r)$, 定义为$\sigma\mapsto L_\sigma$是一个群同态.

注意到$\mathrm{sgn}: S_r\to\{\pm1\}$是群同态.

定义(对称、反对称张量). 取$T\in T_r$,

1 张量代数

(i) 若$\forall\sigma\in S_r, \sigma T=T$, 则称$T$为**对称张量**.

(ii) 若$\forall\sigma\in S_r, \sigma T=\mathrm{sgn}(\sigma)T$, 则称$T$为**反对称张量**.

下面给出上述两个张量的相关性质。

定义(性质). (i) 对称张量、反对称张量构成一个线性子空间.

(ii) T是反对称张量，当且仅当$T\left(X_1,\cdots,X_i,\cdots,X_j,\cdots,X_r\right)=-T\left(X_1,\cdots,X_j,\cdots,X_i,\cdots,X_r\right)$.

定义(对称化算子、反对称化算子). 定义 (i) $S_r:T_r\to T_r$为$S_r(T)=\frac{1}{r!}\sum\limits_{\sigma\in S_r}\sigma\circ T$,

(ii) $A_r:T_r\to T_r$为$A_r(T)=\frac{1}{r!}\sum\limits_{\sigma\in S_r}\mathrm{sgn}(\sigma)\sigma\circ T$

引理(两种算子的性质). (i) $S_r(T)$是对称张量，$A_r(T)$是反对称张量.　(ii) $S_r\circ S_r=S_r, A_r\circ A_r=A_r$.

证明： (i) 根据定义代入$\forall\tau\in S_r, \tau\circ(S_r(T))=S_r(T), \tau\circ(A_r(T))=\mathrm{sgn}(\tau)A_r(T)$.

(ii) 若T是对称张量，则$S_r(T)=T$, 从而$S_r\circ S_r(T)=S_r(T)$. 若T是反对称张量，则$A_r(T)=T$, 从而$A_r\circ A_r(T)=A_r(T)$.

∎

我们记r阶反对称张量构成的子空间为$\Lambda^r(V^*)=\mathrm{Im}(A_r)$. 于是$\Lambda^1(V^*)=V^*$, 由之前$T_0^0(V^*)=\mathbb{R}$的约定，我们有$\Lambda^0(V^*)=\mathbb{R}$.

定义(外积). 设$\varphi\in\Lambda^r(V^*),\psi\in\Lambda^s(V^*)$, 定义$\varphi\wedge\psi\in\Lambda^{r+s}(V^*)$, 为

$$\varphi\wedge\psi=\frac{(r+s)!}{r!s!}A_{r+s}(\varphi\otimes\psi)=\frac{1}{r!s!}\sum_{\sigma\in S_r}\mathrm{sgn}(\sigma)\sigma\circ(\varphi\otimes\psi). \tag{21}$$

引理(外积的性质). (i) 外积是双线性的. (ii) 外积满足结合律. $(\varphi\wedge\psi)\wedge\eta=\varphi\wedge(\psi\wedge\eta)$

(iii) $\varphi\wedge\psi=(-1)^{rs}\psi\wedge\varphi,\forall\varphi\in\Lambda^r(V^*),\forall\psi\in\Lambda^s(V^*)$.

证明: (i) 直接由定义可知.

■

定理(外积的对偶基). 取V^*的对偶基$\{w^j\}_{j=1}^n$, 则$\Lambda^r(V^*)$的基为

$$\{w^{i_1}\wedge\cdots\wedge w^{i_r}:1\le i_1\le i_2\le\cdots\le i_r\le n\}, \tag{22}$$

其中$w^{i_1}\wedge\cdots\wedge w^{i_r}=r!A_r(w^{i_1}\otimes\cdots\otimes w^{i_r})$.

注意到$w^{i_1}\otimes\cdots\otimes w^{i_r}$是全空间的基底，于是$\forall\varphi\in\Lambda^r(V^*),\varphi=\varphi_{i_1\cdots i_r}w^{i_1}\otimes\cdots\otimes w^{i_r}$, 并且有

$$\begin{aligned}\varphi = A_r(\varphi) &= \varphi_{i_1\cdots i_r} A_r(w^{i_1} \otimes \cdots \otimes w^{i_r}) \\ &= \varphi_{i_1\cdots i_r} \frac{1}{r!} w^{i_1} \wedge \cdots \wedge w^{i_r}\end{aligned} \tag{23}$$

由之前的引理（外积的性质）可得

$$w^{i_1} \wedge \cdots \wedge w^{i_r} = \begin{cases} 0, & i_1, \cdots, \text{某两个相等} \\ \pm w^{j_1} \wedge \cdots \wedge w^{j_r}, & j_1, \cdots, j_r \text{是} i_1, \cdots, i_r \text{ 的一个重排} \end{cases} \tag{24}$$

从而φ可以由上面的集合线性表示。由对偶基的性质，该集合内的元素线性无关，从而构成了$\Lambda^r(V^*)$的基底. 根据基的个数，我们有 $\dim(\Lambda^r(V^*)) = \binom{n}{r}$.

2. 张量丛

设M是C^∞流形，记$T_s^r(T_pM) = T_{s,p}^r M$. 当$p$变动时，$T_{s,p}^r M$形成类似于向量丛的结构，记$T_s^r(M) = \bigcup_{p\in M} T_{s,p}^r(M)$. 令映射$\pi : T_s^r(M) \to M$, $\pi(T_{s,p}^r M) = p$是类似的投影映射. 设其上的坐标卡$(U, \varphi; x^i)$, $\forall p \in U$, $\frac{\partial}{\partial x^i}$是$T_p(M)$的自然基底，从而

$$\frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \otimes \mathrm{d}x^{j_1} \cdots \otimes \mathrm{d}x^{j_s} \tag{25}$$

是$T^r_{s,p}M$的一族基底. 类似切丛，我们可以定义

$$\tilde{\varphi}_U : \pi^{-1}(U) \to U \times \left(\underbrace{\mathbb{R}^m \otimes \cdots \otimes \mathbb{R}^m}_{r} \otimes \underbrace{\mathbb{R}^m \otimes \cdots \otimes \mathbb{R}^m}_{s} \right) \tag{26}$$

为$\forall p \in U, \forall \Phi \in T^r_{s,p}M$, 坐标表示为$\Phi = \Phi^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\big|_p \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}}\big|_p \otimes \mathrm{d}x^{j_1}_p \cdots \otimes \mathrm{d}x^{j_s}_p$,

$$\tilde{\varphi}_U(\Phi) = \left(p, \Phi^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}\right). \tag{27}$$

是一个$m + m^{r+s}$维光滑流形. 在这上面定义类似的拓扑，使得上面的$\tilde{\varphi}_U$称为同胚.

类似于向量场，我们可以有

定义(张量场). 将张量从$T^r_s(M)$的一个截面称为(r, s)型张量场. 即为M上每一个点p指定一个$T^r_{s,p}M$中的张量.

1 ▶ 张量代数

下面也再次聚焦 0 次协变的张量空间. 和张量丛定义完全类似，我们引入反称张量和外积的概念，定义外微分形式丛和外微分形式场.

定义(外微分形式丛). $\bigwedge^r T_p^*(M)$是$T_p^*(M)$上r阶反对称张量空间. 令$\bigwedge^r(M)=\bigcup_{p\in M}\bigwedge^r(T_p^*M)$, 被称为**$r$次外形式丛**. 其上面有一个自然的$C^{k-1}$微分结构，使之成为$m+\binom{m}{r}$维流形.

定义(外形式). $\bigwedge^r(M)$的截面被称为**r—外微分形式**, 一般用符号w表示，其概念和向量场X对应. 记$A^r(M)$为所有r—外形式的集合. 记$A(M)=\oplus_{i=0}^m A^m(M)$，其元素被称为**外微分形式**，$A(M)$被称为**外微分形式空间**. 特别地，$A^0(M)=C^\infty(M)$，$A^1(M)=\Gamma(T^*M)$. 这里$\Gamma$表示取余切丛的截面.

定理(外形式与外积). 任意的$w\in A^r(M),\tau\in A^s(M)$, 令$(w\wedge\tau)(p)=w(p)\wedge\tau(p)$, 则$w\wedge\tau\in A^{r+s}M$.

证明： 这里是逐点定义的，故直接继承自外积的性质.

■

我们之前定义过$f:M\to N$诱导的切映射$f_{*,p}:T_pM\to T_qN, q=f(p)$, 以及它的对偶映射$f_p^*: T_q^*N\to T_p^*M$. 下面定义整体上的$f^*:A^s(N)\to A^s(M)$.

定义(拉回映射). (i) $s=0$. $\forall\theta\in A^0(N)=C^\infty(N)$, 定义$f^*\theta=\theta\circ f$. 下面考虑$s\geq 1$的情形.

(ii) $s=1$. 我们利用之前的f_p^*在M上逐点定义f^*. $\forall\theta\in A^1(N)$，定义$(f^*\theta)(p)=f_p^*\left(\theta_{f(p)}\right)\in T_p^*M$. 则显然$f^*\theta\in A^1(M)$. 利用$f_p^*\left(dy^j|_{f(p)}\right)=\sum_{i=1}^m dx_p^i\frac{\partial y^j}{\partial x^i}|_p$可知是光滑的.

(iii) $s\geq 2$. 我们类似地使用逐点定义. $\forall\theta\in A^s(N)$，$\forall X_1,\cdots,X_s\in T_pM$,

$$\left(f^*\theta\right)_p(X_1,\cdots,X_s)=\theta_{f(p)}\left(f_{*p}(X_1),\cdots,f_{*p}(X_s)\right)\tag{28}$$

特别地，$s=1$时，$A^1(N)=\Gamma(T^*N)$, 从而$\forall X\in T_pM$, $\left(f^*\theta\right)_p(X)=\theta_{f(p)}\left(f_{*p}(X)\right)$, 和之前定义的对偶映射定义$f_p^*\left(\theta_{f(p)}\right):=\theta_{f(p)}\circ f_{*p}$是一致的. 这个映射又被称为**拉回映射**(pull-back map).

然后对于外积运算，和张量积几乎一样的有

引理(f诱导的外积). $f^*(w_1\wedge w_2)=f^*(w_1)\wedge f^*(w_2)$.

3. 外微分

定义(外微分). 映射$d:A(M)\to A(M)$被称为外微分，若

(i) d是线性的. $d(kw_1+w_2)=kdw_1+dw_2$. $\forall w_1,w_2\in A(M)$.

(ii) $\forall f\in C^\infty(M)=A^0(M)$, $df(p)=df_p$是之前定义的普通微分，且$d(df)=0$.

(iii) $d(w_1\wedge w_2)=dw_1\wedge w_2+(-1)^r w_1\wedge dw_2$, 其中$w_1\in A^r(M)$, $w_2\in A(M)$.

定理(外微分的存在唯一性). 存在唯一的外微分映射$d: A(M) \to A(M)$. 这里具体来说，d是局部的，且在坐标卡上d存在且有唯一表达.

为证明上述结论，我们先给出一些引理.

引理(外微分的性质). 设$d: A(M) \to A(M)$是外微分，则

(i) 若$w_1|_U = w_2|_U$, U是非空开集，则$d(w_1)|_U = d(w_2)|_U$.

(ii) 任意给定一个非空开集U，存在唯一的外微分$d_U: A(U) \to A(U)$, $d_U(w|_U) = (dw)|_U$. 即使用整体的外微分可以定义局部的外微分.

证明：(i) 使用之前给出的局部化引理. 令$w := w_1 - w_2$, 则$w|_U = 0$. 只需证$dw|_U = 0$. 任取$p \in U$, 取包含p开领域$V \subset \overline{V} \subset U$, 以及$f \in C^\infty(M)$, 满足$f|_V \equiv 1$, $f|_{M-U} \equiv 0$. 从而$fw \equiv 0$，$d(fw) \equiv 0$. 由外微分定义(iii)$d(fw) = df \wedge w + f \wedge dw = 0$. 代入$p$有$df(p) \wedge \underbrace{w(p)}_{=0} + \underbrace{f(p)}_{=1} dw(p) = 0$,从而得证.

(ii) 先定义d_U, 验证良定义，再验证其是外微分. 具体来说，$\forall w \in A^r(U), p \in U$, 取$p \in V \subset \overline{V} \subset V_1 \subset \overline{V_1} \subset U$, 以及$f \in C^\infty(M)$, 满足$f|_V \equiv 1$, $f|_{M-V_1} \equiv 0$. 令

$$\tilde{w}(q) = \begin{cases} fw(q), & q \in U \\ 0, & q \notin U \end{cases} \tag{29}$$

1 张量代数

直接令$d_U w(q) = d\tilde{w}(q)$. 先验证其良定义性. 设$(\tilde{V},\tilde{\varphi};\tilde{x}^i)$是另一个坐标卡, 则$\tilde{f}w\ |_{V\cap\tilde{V}} = w|_{V\cap\tilde{V}} = fw\ |_{V\cap\tilde{V}}$，利用(i)可知$d(\tilde{f}w)|_{V\cap\tilde{V}} = d(fw)|_{V\cap\tilde{V}}$，从而$p$点处相等.

下面验证$d_U A(M) \to A(M)$是外微分. 线性性$d_U(k_1 w_1 + w_2)(p) = df(k_1 w_1 + w_2)(p) = kdfw_1(p) + dfw_2(p) = kd_U(w_1)(p) + d_U(w_2)(p)$.

下面验证第二条性质. $\forall g \in C^\infty(U), d_U(g)(p) = dfg(p) = \underbrace{df(p)}_{=0}g(p) + dg(p)\underbrace{f(p)}_{=1} = dg(p)$. 且$d_U(d_U g)(p) = df(d_U g)(p) = df(dfg)(p)$. 这是因为$d_U g|_V = d(fg)|_V$, 从而$(fd_U g)|_V = (fd(fg))|_V$, 再由(i)可知$d(fd_U g)|_V = d(fd(fg))|_V = \underbrace{df(p)}_{=0} \wedge d(fg)(p) + f\underbrace{d(d(fg))(p)}_{=0} = 0$.

下面看第三条. $\forall w_1 \in A^r(U), w_2 \in A(U)$, 由定义，$d_U w_1(p) = dfw_1(p), d_U w_2(p) = dfw_2(p), d_U(w_1 \wedge w_2)(p) = df(w_1 \wedge w_2) = df^2(w_1 \wedge w_2)$, 从而$d_U(w_1 \wedge w_2) = df^2(w_1 \wedge w_2) = d(fw_1) \wedge (fw_2) + (-1)^r(fw_1) \wedge d(fw_2)$. 证毕.

唯一性则根据定义中使用的d本身的全局性来证明.

■

引理(坐标卡上的外微分). 设$(U,\varphi;x^i)$是M上的一个坐标卡，则存在唯一的外微分$d: A(U) \to A(U)$.

证明： 直接使用基底和外积来定义，然后验证其满足外微分的定义. $\forall w \in A^r(U), w = \sum_{i_1<\cdots<i_r} w_{i_1\cdots i_r} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r}$, 其中$dx^i \in A^1(U), w_{i_1\cdots i_r} \in C^\infty(U)$, 直接定义(其他几项都是函数芽的二次外微分，为0)

$$dw = \sum_{i_1<\cdots<i_r} dw_{i_1\cdots i_r} \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r}. \tag{30}$$

验证其满足外微分的三条性质. $d(kw_1 + w_2)$ 线性性显然成立，因为d作用在函数芽上是线性的. 对于第二条，$\forall f \in C^\infty(U)$, $df = \frac{\partial f}{\partial x^j}dx^j, d(df) = d\frac{\partial f}{\partial x^j} \wedge dx^j = \frac{\partial^2 f}{\partial x^k x^j}dx^k \wedge dx^j = 0.$

对于第三条，我们只考察外积表达式中的一项，求和是类似的。$\forall w_1 = fdw^{i_1} \wedge \cdots \wedge dw^{i_r}, w_2 = gdw^{j_1} \wedge \cdots \wedge dw^{j_s}$,

$$\begin{aligned}
d(w_1 \wedge w_2) &= d\big(fgdw^{i_1} \wedge \cdots \wedge dw^{i_r} \wedge dw^{j_1} \wedge \cdots \wedge dw^{j_s}\big) \\
&= d(fg) \wedge dw^{i_1} \wedge \cdots \wedge dw^{i_r} \wedge dw^{j_1} \wedge \cdots \wedge dw^{j_s} \\
&= (gdf + fdg) \wedge dw^{i_1} \wedge \cdots \wedge dw^{i_r} \wedge dw^{j_1} \wedge \cdots \wedge dw^{j_s} \\
&= \big(df \wedge dw^{i_1} \wedge \cdots \wedge dw^{i_r}\big) \wedge \big(gdw^{j_1} \wedge \cdots \wedge dw^{j_s}\big) + (-1)^r\big(fdw^{i_1} \wedge \cdots \wedge dw^{i_r}\big) \wedge \big(dg \wedge dw^{j_1} \wedge \cdots \wedge dw^{j_s}\big) \\
&= dw_1 \wedge w_2 + (-1)^r w_1 \wedge dw_2.
\end{aligned} \tag{31}$$

唯一性.

■

下面给出原定理的证明.

证明： 存在性的证明. 我们利用坐标卡定义全局上的外微分. $\forall w \in A(M), \forall p \in M$, 取含$p$的坐标卡$(U, \varphi; x^i)$, 由上述引理, 存在外微分$d_U : A(U) \to A(U)$. 定义$d : A(M) \to A(M)$, 为$dw(p) = d_U(w|_U)(p)$. 由引理可知是良定义的。具体来说，$V$是含

p的另一个坐标卡，$U\cap V\subset U, U\cap V\subset V$, 从而由引理，$(d_U(w|_U))|_{U\cap V}=d_{U\cap V}(w|_{U\cap V})=(d_V(w|_V))|_{U\cap V}$，从而$p$点处相等。

唯一性. 设d_1,d_2是$A(M)\to A(M)$的外微分，则由引理，其在坐标卡上分别定义了$d_{1,U},d_{2,U}$, 由上面的引理，坐标卡上的外微分唯一.

■

定理(两次外微分). $d\circ d=0.$

证明： 只需在坐标卡上计算. 不妨只取$w=fdx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_r}$, 从而$dw=df\wedge dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_r}$, $df=\frac{\partial f}{\partial x^j}dx^j$, 从而

$$\begin{aligned} d(dw)&=\left(d\frac{\partial f}{\partial x^j}\right)\wedge dx^j\wedge dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_r}\\ &=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^k x^j}dx^k\wedge dx^j\right)\wedge dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_r}=0. \end{aligned} \tag{32}$$

因为任何互异的指标$j\neq k$各出现一次。

■

目录

目录

3 ▶ 流形上的积分

1. 流形的定向

利用n次外形式定义n维线性空间的基的方向。设V是向量空间，$e_1, \cdots, e_n$是一组基，$e_1^t, \cdots, e_n^t$是一组连续变化的基，则其确定相同的定向。

由$\dim(\wedge^n (V^*)) = 1$, 取生成元$\Omega \in \wedge^n (V^*)$, 则$\Omega(e_1^t, \cdots, e_n^t) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$是连续变化的，符号不变。

定义(向量空间基的定向). $\wedge^n (V^*) - \{0\}$的连通分支被称为**定向**，显然有两个连通分支。给定定向$[\Omega]$后，若$(e_1, \cdots, e_n)$满足$\Omega(e_1, \cdots, e_n) > 0$, 则称该组基与定向$[\Omega]$相符。

下面给出流形的定向。

定义(流形的定向). 设M是m维光滑流形，若$\omega \in A^m(M)$处处非零，则称M是可定向的，且称ω是定向$m-$形式。两个定向$m-$形式ω_1, ω_2称为**等价的**，若存在$f \in C^\infty(M)$处处非零，使得$\omega_1 = f\omega_2$. 流形M的一个**定向**是定向$m-$形式的一个等价类.

利用流形上的单位分解，我们可以得到

定理(可定向与 Jacobi 矩阵). 设M是可定向流形，当且仅当存在坐标卡覆盖$\{U_\alpha, \varphi_\alpha; x_\alpha^i\}$满足$D\left(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}\right) = \det\left(\frac{\partial x_\alpha^i}{\partial x_\beta^j}\right) > 0, \forall u_\alpha \cap u_\beta \neq \emptyset$.

证明： 必要性可以直接通过不同的外微分坐标变换得到行列式。 充分性：取从属于U_α的单位分解

■

定理(推论). 流形M可定向，当且仅当存在M的开覆盖$\{U_\alpha\}$以及处处非零的$w_\alpha \in A^m(U_\alpha)$，且当$U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$时，$w_\alpha = f_\alpha^\beta w_\beta, f_\alpha^\beta > 0$.

记$[w]$时流行的定向，$w_\alpha \in A^m(U_\alpha)$若满足$w_\alpha = f_\alpha w|_{U_\alpha}, f_\alpha > 0$，则称$w_\alpha$与定向$[w]$相符.

设$(U,\varphi;x^i)$时坐标卡，若$dx^1 \wedge \cdots dx^m = fw|_U, f > 0$，称该坐标卡与定向$[w]$相符.

例(). 求证$P^m(R)$可定向当且仅当m为奇数.

2. 流形上的积分

设$(U_1,\varphi_1;x_1^i)$和$(U_2,\varphi_2;x_2^i)$是两个坐标卡与定向$[w_0]$相符的坐标卡。任意$w \in A^m(M)$在坐标卡内可写成

$$\begin{aligned} w|_{U_1} &= g_1 dx_1^1 \wedge \cdots \wedge dx_1^m \\ w|_{U_2} &= g_2 dx_2^1 \wedge \cdots \wedge dx_2^m \end{aligned} \tag{33}$$

引理(积分变换公式). 设$\mathrm{supp} g_1$是$U_1\cap U_2$的紧子集，则

$$\int_{\varphi_1(U_1\cap U_2)} g_1\circ\varphi_1^{-1}dx_1^1\cdots dx_1^m=\int_{\varphi_2(U_1\cap U_2)} g_2\circ\varphi_2^{-1}dx_2^1\cdots dx_2^m \tag{34}$$

证明： 利用欧氏空间的多元积分变换公式.

■

下面定义外形式的积分.

设M可定向，$[w_0]$为其定向，$w\in A^m(M)$且$\mathrm{supp}w=\overline{\{p\in M:w(p)\neq 0\}}$是紧集. 从而可以用有限个与定向相符的坐标卡$\{(U_\alpha,\varphi_\alpha;x_\alpha^i)\}_{\alpha\in J}$覆盖$\mathrm{supp}w$, 从而$\{U_\alpha\}_\alpha\cup(M-\mathrm{supp}w)$为$M$的开覆盖. 取从属于该开覆盖的单位分解$f_\alpha$, 且$\mathrm{supp}f_\alpha\subset U_\alpha$, $\mathrm{supp}f_0\subset M-\mathrm{supp}w$, $\sum_\alpha f_\alpha+f_0=1$.

发现$w=\left(\sum_\alpha f_\alpha+f_0\right)w=\sum_\alpha f_\alpha w$. 在$(U_\alpha,\varphi_\alpha;x_\alpha^i)$中，$w=g_\alpha dx_\alpha^1\wedge\cdots dx_\alpha^m$. 于是可以定义

$$\int_M w:=\sum_\alpha\int_{\varphi_\alpha(U_\alpha)}(f_\alpha g_\alpha)\circ\varphi_\alpha^{-1}dx_\alpha^1\cdots dx_\alpha^m. \tag{35}$$

定理(积分的良定义性). 上述积分与坐标卡的选取以及单位分解无关.

证明：

$\blacksquare$

3. 带边界流形

记$\mathbb{R}^m_+ = \{(x^1, \cdots, x^m) : x^m \geq 0\}$. 任取开集$U \subset \mathbb{R}^m_+$, 定义其内部$\mathrm{Int}U = U \cap \{x^m > 0\}$, 其边界$\partial U = U \cap \{x^m = 0\}$. 注意我们不取内部的边界. 我们利用延拓来定义.

称$f : U \to \mathbb{R}$是C^1的，若存在$\mathbb{R}^m$中开集$\tilde{U} \supset U$以及C^1函数$\tilde{f} : \tilde{U} \to \mathbb{R}$, 且$\tilde{f}|_U = f$. 对$F = (f^1, \cdots, f^n) : U \to \mathbb{R}^n$, 也类似定义其为$C^1$的.

由于延拓出去了，所以可定义$Df(x) = D\tilde{f}(x)$. 这是良定义的.

定义(带边流形的C^1同胚). 设$U, V \subset \mathbb{R}^m_+$是开集，称$F : U \to V$是$C^1$同胚，若存在$C^1$映射$G : V \to U$, s.t. $F \circ G = \mathrm{id}_V, G \circ F = \mathrm{id}_U$.

引理(内部映到内部，边界映到边界). 设$F : U \to V$是C^1同胚，则$F(\mathrm{Int}U) = \mathrm{Int}V$, $F(\partial U) = \partial V$, 即$F|_{\mathrm{Int}U} : \mathrm{Int}U \to \mathrm{Int}V$和$F|_{\partial U} : \partial U \to \partial V$是$C^1$同胚.

证明： 利用之前的引理以及单位分解的性质. 若$\exists p \in U$, s.t. $F(p) \in \partial V$, 令$F(x) = (f^1(x), \cdots, f^m(x))$, $f^m(p) = 0$, $f^m(x) > 0, \forall x \in U$. 从而$\frac{\partial f^m}{\partial x^i}(p) = \lim_{t \to 0} \frac{f^m(p + te^i) - f^m(p)}{t} = 0, \forall i = 1, \cdots, m$ (Fermat's, p是f^m在区域内部的极值点，每个方向都可逼

近，从而能够取0). 于是$DF(p)=\begin{pmatrix} * \\ \underbrace{0,\cdots,0}_{m} \end{pmatrix}$, rank$DF(p)<m$. 但是$F$是同胚，即存在$G:V\to U$, s.t. $G\circ F=\mathrm{id}_U$, 于是$DG(F(p))DF(p)=E_m$,矛盾.

■

定义(带边流形). 设M是满足A_2公理的 Hausdorff 空间，若$\forall p\in M$, 存在开邻域U以及$\varphi:U\to\varphi(U)\subset\mathbb{R}^m_+$是同胚，则称$(U,\varphi)$是坐标卡. 若存在坐标图册$\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}$使得$U_\alpha\cap U_\beta\neq\emptyset$时，有$\varphi_\alpha(U_\alpha\cap U_\beta)\xrightarrow{\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1}}\varphi_\beta(U_\alpha\cap U_\beta)$是$C^k$的，则称$M$是带边界流形.

引理(内部的表达). $\mathrm{Int}M=\{x\in M:\exists x\ 坐标邻域U\ s.t\ \varphi(x)\in \mathrm{Int}(\varphi(U))\}$

引理(边界的表达). $\partial M=\{x\in M:\exists x\ 坐标邻域U\ s.t\ \varphi(x)\in \partial(\varphi(U))\}$

引理(边界作为流形). ∂M是$(m-1)$维C^k流形.

证明： $\forall p\in M$, 取M上的坐标卡$(U,\varphi;x^i)$, 由带边流形定义，$\varphi|_{U\cap\partial M}:U\cap\partial M\to\partial(\varphi(U))$. 设$(U,\varphi;x^i)$和$(V,\psi;y^i)$是两个坐标卡, 则坐标变换

$$(x^1\cdots,x^{m-1})\to(x^1\cdots,x^{m-1},0)\to(y^1,\cdots,y^{m-1},0)\to(y^1,\cdots,y^{m-1})\tag{36}$$

是光滑的.

■

定义(可定向的带边流形). M是带边流形，则它是可定向的，若存在坐标图册$(U_\alpha,\varphi_\alpha;x_\alpha^i)$，使得$U_\alpha\cap U_\beta\neq\emptyset$，$D\left(\varphi_\alpha\circ\varphi_\beta^{-1}\right)>0$.

引理(可定向的边界). M是可定向的，则∂M是可定向的.

证明： 将上述的坐标图册(U_α)限制在边界上. 当$U_\alpha\cap U_\beta\cap\partial M\neq\emptyset$，只需验证$D\varphi_{\alpha|_{U_\alpha\cap U_\beta\cap\partial M}}\circ\varphi^{-1}_{\beta|_{U_\alpha\cap U_\beta\cap\partial M}}>0$.

■

设$[w_0]$是M上的定向，给定与其相符的坐标图册$\{(U_\alpha,\varphi_\alpha;x_\alpha^i)\}$，则

$$\left\{\left(U_\alpha\cap\partial M,\varphi_\alpha|_{U_\alpha\cap\partial M};x_\alpha^i,i=1,\cdots,m-1\right)\right\}\tag{37}$$

给出了∂M的定向.

定义(边界上的定向). 设$(U,\varphi;x^i)$与$[w_0]$相符，称$(-1)^m dx^1\wedge\cdots\wedge dx^{m-1}$为$[w_0]$在$\partial M$上的诱导定向.

定理(Stokes 定理). 设M是可定向的光滑带边流形，$w\in A^{m-1}(M)$有紧支集，则

$$\int_M dw=\int_{\partial M}w|_{\partial M}.\tag{38}$$

3 流形上的积分

记$i:\partial M\to M, w|_{\partial M}=i^*w, \partial M$上的积分由诱导定向计算.

证明： 由外微分的积分定义，取单位分解$f_\alpha, w=\sum_\alpha f_\alpha w$, 完成了对曲面和曲线的分割. $\mathrm{LHS}=\sum_\alpha\int_M d(f_i w)$, $\mathrm{RHS}=\sum_\alpha\int_{\partial M} f_i w$. 只需证在每个坐标卡上成立. 不妨只取一个坐标卡$(U,\varphi;x^i)$，且$\mathrm{supp}w\subset U$.

第一种情形. $U\subset \mathrm{Int}M$，即$U\cap\partial M=\emptyset$. 不妨$\varphi(U)=(0,1)^m$. 记$w=\sum_{i=1}^m(-1)^{i-1}g_i dx^1\wedge\cdots\wedge\widehat{dx^i}\wedge\cdots\wedge dx^m$, 从而$dw=\sum_{i=1}^m\frac{\partial g_i}{\partial x^i}dx^1\wedge\cdots\wedge dx^m$. 从而

$$\int_M dw=\int_U dw=\sum_{i=1}^m\int_{\varphi(U)}\frac{\partial g_i}{\partial x^i}dx^1\cdots dx^m \tag{39}$$

$$\int_{\varphi(U)}\frac{\partial g_i}{\partial x^i}dx^1\cdots dx^m=0 \tag{40}$$

因为累次积分之后，紧支集让碰到被积边界的$g_i=0$.

第二种情形. $U\cap\partial M\neq\emptyset$. 不妨$\varphi(U)=(0,1)^{m-1}\times[0,1)$. 只需计算$i=m$的情形.

$$\begin{aligned}\int_{\varphi(U)}\frac{\partial g_i}{\partial x^i}dx^1\cdots dx^m&=\int_{[0,1]^{m-1}}dx^1\cdots dx^{m-1}\int_0^1\frac{\partial g_m}{\partial x^m}dx^m\\&=-\int_{[0,1]^{m-1}}g_m(x^1,\cdots,x^{m-1},0)dx^1\cdots dx^{m-1}.\end{aligned} \tag{41}$$

∎

定理(推论). M是光滑流形，则$\int_M dw = 0, \forall w \in A^{m-1}(M)$且supp$w$紧.

目录

De Rham 同调

定义(特别形式). $w \in A^r(M)$, 若$dw = 0$, 则称w是闭形式. 若存在$\sigma \in A^{r-1}(M)$使得$w = d\sigma$, 则称w是恰当形式.

由$d^2 = 0$, 可知恰当形式必为闭形式. 反之不一定成立. 可结合如下例子.

例(Im[$(dz)/z$]). $M = \mathbb{R}^2 - \{0\}$, $w = \frac{-x^2}{(x^1)^2+(x^2)^2}dx^1 + \frac{x^1}{(x^1)^2+(x^2)^2}dx^2$. 则$dw = 0$. 但不存在$\sigma \in A^0(M) = C^\infty(M)$使得$w = d\sigma$.

更一般地，M是紧致可定向的光滑流形，则$w \in A^m(M)$是恰当的， 当且仅当$\int_M w = 0$.

1. 上链复形

定义(上链复形). (i) 设$C^i(0 \le i \le m)$是线性空间，$d^i : C^i \to C^{i+1}$是线性映射，若$d^{i+1} \circ d^i = 0$, 则

$$0 \xrightarrow{0} C^0 \xrightarrow{d^0} C^1 \to \cdots \to C^{m-1} \xrightarrow{d^{m-1}} C^m \xrightarrow{d^m} 0 \tag{42}$$

为**上链复形**（cochain complex）, 记为$(C^\cdot, d^\cdot)$.

(ii) 由$d^i \circ d^{i-1} = 0$, 得$\mathrm{Im} d^{i-1} \subset \ker d^i$. 定义第$i$个**同调群**(homology group)为

$$H^i(C^\cdot) = \ker d^i / \ \mathrm{Im}\ d^{i-1}. \tag{43}$$

(iii) 设M是光滑流形，令$C^i = A^i(M), d^i = d|_{A^i(M)}$, 由$d \circ d = 0$. (C^i, d^i)是上链复形，相应的$H^i(C^\cdot, d^\cdot)$称为M的第i个 de Rham 上同调群，记为$H^i_{dR}(M)$.

例(特别的同调群). (i) $H^0_{dR}(M) = \ker\{f \in C^\infty(M) : df = 0\} = \{f \in C^\infty : f \equiv C$ 在每一个连通分支$\}$. 所有的 1-形式都是闭形式，即$A^1(M) = \ker d^1$, 故$H^1_{dR}(M) = A^1(M)/(dC^\infty(M))$.

(ii) $H^m_{dR}(M) = (A^m(M))/(dA^{m-1}(M))$, 即所有的$m-$形式(自然是闭形式)模去恰当$m-$形式.

上链复形一般用于构造上同调群，这里的 complex 是代数中“组合体、组合体”的含义，和复数中的 complex 有所区别。而上链复形是与链复形(chain complex)对偶的概念，后者在同调代数中有重要应用。下面讨论(上)链复形之间的映射.

定义(链映射). 设$(A^\cdot, d^\cdot), (B^\cdot, d'^\cdot)$是两个上链复形，若存在一族线性映射$\{f^i : A^i \to B^i\}$, 使得$d'^i \circ f^i = f^{i+1} \circ d^i$(保持结构), 则称$f^\cdot = \{f^i\}_{i=0}^m$为两个上链复形之间的**链映射**(chain map).

$$\begin{array}{ccc}
A^i & \xrightarrow{d^i} & A^{i+1} \\
{\scriptstyle f^i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f^{i+1}} \\
B^i & \xrightarrow{d'^i} & B^{i+1}
\end{array}$$

例(拉回映射). (i) 设$f : M \to N$是光滑映射，则$f^* : A(N) \to A(M)$满足$d(f^* w) = f^*(dw)$, 故是链映射. 这里保持的结构就是将闭形式映为闭形式，恰当形式映为恰当形式.

证明： 前面易证. ∎

引理(链映射诱导同态). 设$f : A^\cdot \to B^\cdot$是链映射，则f诱导$[f] : \{[f^i] : H^i(A^\cdot) \to H^i(B^\cdot)\}$, $[f^i]$是线性映射.

证明： $\forall [a] \in H^i(A^\cdot)$, 定义$[f^i]([a]) = [f^i(a)]$. 需证明是确实位于$\mathrm{Im}(d^{i-1})$, 且良定义的. 因为$d^i(f^i(a)) = f^{i+1}(d^i(a)) = f^{i+1}(0) = 0$. 若$[a'] = [a]$, 则$a' - a \in \mathrm{Im}(d^{i-1})$, 于是$\exists x \in A^{i-1}$, s.t. $a' - a = d^{i-1}x$, $f^i(a' - a) = f^i(d^{i-1}x) = d^{i-1}(f^i x) \in \mathrm{Im}(d^i)$, 从而$[f^i a'] = [f^i a]$. 线性请自行验证. ∎

定理(推论). 设$f : A^\cdot \to B^\cdot$, $g : B^\cdot \to C^\cdot$是链映射，则$[g \circ f] = [g] \circ [f]$. 特别地，$\mathrm{id} : A^\cdot \to A^\cdot$诱导恒等映射$[\mathrm{id}] = \mathrm{id} : H^i(A^\cdot) \to H^i(A^\cdot)$.

定理(推论). 设$f : M \to N$是光滑同胚，则$H^i_{dR}(M) \cong H^i_{dR}(N)$.

证明： 设$f^* : A(N) \to A(M)$是链映射，其逆映射$(f^{-1})^* : A(M) \to A(N)$也是链映射，且$(f^{-1})^* \circ f^* = \mathrm{id}_{A(N)}$, $f^* \circ (f^{-1})^* = \mathrm{id}_{A(M)}$. 由之前的推论，诱导同构$[f^*] : H^i_{dR}(N) \to H^i_{dR}(M)$以及$\left[(f^{-1})^*\right] : H^i_{dR}(M) \to H^i_{dR}(N)$互为逆映射. ∎

注：对比$0 \to C^0 \to \cdots \to C^m \to 0$, 其上的同调群为$0 \to H^0 \to \cdots \to H^m \to 0$, 作为链复形，其同调群是自身.

2. 正合列

闭形式都是恰当形式，对应下面的定义

定义(正合). (i) 称$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$, 在$B$处**正合**(exact)，若$\operatorname{Im} f = \ker g$.

(ii) 若$0 \to A^0 \to A^1 \to \cdots \to A^l \to 0$在每个$A^i$处正合，称为**正合链**.

定理(从短正合列到长正合列). 设$A^\cdot, B^\cdot, C^\cdot$是三个链复形，$f : A^\cdot \to B^\cdot, g : B^\cdot \to C^\cdot$是链映射，且

$$0 \to A^i \to B^i \to C^i \to 0 \quad (\text{短正合列}) \tag{44}$$

在每个i处正合，则存在连接同态$\delta^i : H^i(C^\cdot) \to H^{i+1}(A^\cdot)$使得下列序列正合

$$\ldots \to H^i(A^\cdot) \xrightarrow{[f^i]} H^i(B^\cdot) \xrightarrow{[g^i]} H^i(C^\cdot) \xrightarrow{\delta^i} H^{i+1}(A^\cdot) \to \ldots \quad (\text{长正合列}) \tag{45}$$

证明： 定义$\delta^i : H^i(C^\cdot) \to H^{i+1}(A^\cdot)$, $\forall [c^i] \in H^i(C^\cdot)$(类似于闭形式). 由$g^i$满射，$\exists b^i \in B^i$ s.t. $g^i(b^i) = c^i$. 由$db^i \in B^{i+1}$满足链性质$g^{i+1}(db^i) = d(g^i(b^i)) = dc^i = 0$. 利用短正合列性质，$\ker g^{i+1} = \operatorname{Im}(f^{i+1})$, 于是$\exists a^i \in A^{i+1}$，s.t. $f^{i+1}(a^{i+1}) = db^i$. 可证

a^{i+1}是闭的$(d^2b^i = 0 \Rightarrow f^{i+2}(da^{i+1}) = df^{i+1}(a^{i+1}) = d(db^i) = 0 \Rightarrow da^{i+1} = 0)$. 于是定义$\delta^i([c^i]) = [a^{i+1}]$. 下面证明 i) δ良定义 ii) 该序列正合.

$$\begin{array}{ccccccc}
\longrightarrow & A^i & \xrightarrow{d} & A^{i+1} & \longrightarrow \\
 & f^i \downarrow & & \downarrow f^{i+1} & \\
\longrightarrow & B^i & \xrightarrow{d} & B^{i+1} & \longrightarrow \\
 & g^i \downarrow & & \downarrow g^{i+1} & \\
\longrightarrow & C^i & \xrightarrow{d} & C^{i+1} & \longrightarrow
\end{array}$$

■

引理(Poincare 引理). 设$M \subset \mathbb{R}^m$是包含0的星形开集: $\forall x \in M, \forall t \in (0,1), tx \in M$. 则$H^i_{dR}(M) = 0, \forall i \geq 1$, 且$H^0_{dR}(M) \cong \mathbb{R}$.

证明: 构造$I_i : A^i(M) \to A^{i-1}(M)$, s.t. $d \circ I_i + I_{i+1} \circ d = \mathrm{id}_{A^i(M)}$, 这样即可证明闭形式都是恰当形式. ($w \in A^i(M)$闭, $dw = 0$, 取$\alpha = I_i w$, 则$d\alpha = w$, 即w是恰当形式. 这对应同调群中, $\ker(d^i) = \mathrm{Im}(d^{i-1})$) 具体地, 由线性, 只需对单项式定义. 取$w \in A^r(M)$, $w = w_{i_1 \cdots i_r} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r}$, 只需定义

$$I_r\Big(w_{i_1\cdots i_r} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r}\Big)(x) = \sum_{\alpha=1}^{r} (-1)^{\alpha-1} \left(\int_0^1 w_{i_1\cdots i_r}(tx) t^{r-1}\, \mathrm{d}t \right) x^{i_\alpha} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^{i_\alpha}} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r}. \tag{46}$$

从而代入定义得

$$\begin{aligned} dI_r(w) &= r\left(\int_0^1 w_{i_1\cdots i_r}(tx)t^{r-1}\,\mathrm{d}t\right)dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_r} \\ &+\sum_{j=1}^{r}\sum_{\alpha=1}^{r}(-1)^{\alpha-1}\left(\int_0^1 \frac{\partial w_{i_1\cdots i_r}}{\partial x^j}(tx)t^{r-1}\,\mathrm{d}t\right)x^{i_\alpha}dx^j\wedge dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge\widehat{dx^{i_\alpha}}\wedge\cdots\wedge dx^{i_r} \end{aligned} \tag{47}$$

$$\begin{aligned} I_{r+1}(dw) &= I_{r+1}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial w_{i_1\cdots i_r}}{\partial x^j}dx^j\wedge dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_r}\right) \\ &= \sum_{j=1}^{n}\left(\int_0^1 \frac{\partial w_{i_1\cdots i_r}}{\partial x^j}(tx)t^{r-1}\,\mathrm{d}t\right)\left(x^j dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_r}+\sum_{\alpha=1}^{n}(-1)^{\alpha}x^{i_\alpha}dx^j\wedge dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge\widehat{dx^{i_\alpha}}\wedge\cdots\wedge dx^{i_r}\right) \end{aligned} \tag{48}$$

于是两式的最后一项可以消去，得到

$$\begin{aligned} dI_r(w)+I_{r+1}(dw) &= r\left(\int_0^1 w_{i_1\cdots i_r}(tx)t^{r-1}\,\mathrm{d}t\right)dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_r}+\sum_{j=1}^{r}\left(\int_0^1\frac{\partial w_{i_1\cdots i_r}}{\partial x^j}(tx)t^{r-1}\,\mathrm{d}t\cdot x^j\right)dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_r} \\ &= \int_0^1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(w_{i_1\cdots i_r}(tx)t^r\right)\mathrm{d}t\,dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_r} = w_{i_1\cdots i_r}dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_r} = w. \end{aligned} \tag{49}$$

对于$i=0$, $H^0_{dR}(M)=\{\mathbb{R}\}/\{0\}\cong\mathbb{R}$, 因为$M$是连通的，闭 0 形式是常函数，恰当 0 形式是零函数. 当$i\geq 1$时，$H^i_{dR}(M)=\ker(d^i)/(\mathrm{Im}(d^{i-1}))\cong\{0\}$.

■

定理(推论). 若$M\cong\mathbb{R}^m$, 则

$$H^i_{dR}(M)=\begin{cases}0, & i\geq 1\\ \mathbb{R}, & i=0\end{cases} \tag{50}$$

3. Mayer-Vietoris 序列

下面利用集合的分解，直接构造之前定理中的短正合列. 设$M=U\cup V$, U,V是开集。有映射 $U\cap V \underset{\partial_1}{\overset{\partial_0}{\rightrightarrows}} U\sqcup V \xrightarrow{\pi} M$，其中$\partial_0(x)=x\in V$, $\partial_1(x)=x\in U$分别是嵌入. 下面的图更加清楚.

$$
\begin{tikzcd}
 & U \arrow[dr, "\pi"] & \\
U \cap V \arrow[ur, "\partial_0"] \arrow[dr, "\partial_1"'] & & U \cup V \\
 & V \arrow[ur, "\pi"'] &
\end{tikzcd}
$$

定理(MV 序列). 转换范畴。取 De Rham 复形，形成短正合列。注意这里是自然拉回，即限制映射.

$$
\begin{aligned}
A^r(M) &\xrightarrow{\pi^*} A^r(U) \oplus A^r(V) \xrightarrow{\partial_0^* - \partial_1^*} A^r(U \cap V) \\
w &\overset{i}{\mapsto} (w|_U, w|_V) = (\sigma, \tau) \overset{\delta}{\mapsto} (\sigma|_{U\cap V} - \tau|_{U\cap V})
\end{aligned}
\tag{51}
$$

上述序列在每个r处正合.

证明： 令$i = \pi^*, \delta = \partial_0^* - \partial_1^*$. 只需证 i) i单的(显然)，ii) δ满的，iii) $\mathrm{Im}\, i = \ker \delta$ ($\mathrm{Im}(i) \subset \ker \delta$显然，反之取$w$ s.t. $w|_U = \sigma, w|_V = \tau$即证). 注意上述$\delta$的定义保证了性质 iii 的像集包含于零空间.

对于 ii) 取单位分解$1 = \varphi_U + \varphi_V, \mathrm{supp}\varphi_U \subset U, \mathrm{supp}\varphi_V \subset V$. $\forall \alpha \in A^r(U \cap V)$, $\varphi_U \alpha$零延拓到了V上的形式,即$\varphi_U \alpha \in A^r(V)$. 同理$-\varphi_V \alpha \in A^r(U)$. 则$\delta(\varphi_V \alpha, -\varphi_U \alpha) = (\varphi_U + \varphi_V)\alpha = \alpha$.

■

由上述命题得长正合列

$$
\begin{aligned}
&0 \to H^0_{DR}(M) \xrightarrow{i} H^0_{DR}(U) \oplus H^0_{DR}(V) \xrightarrow{\delta} H^0_{DR}(U \cap V) \xrightarrow{d^*} \\
&\xrightarrow{d^*} H^1_{DR}(M) \to \ldots
\end{aligned} \tag{52}
$$

值得留意的是，这里的d^*映射的表达式可以显式写出来.

闭形式不一定是恰当形式，从这里，可得生成元（$H^r_{dR}(M)$的非零元）. 这里非零可以从积分非零推出.

例(S^n上的形式). 证明

$$
H^k(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{R}, & k = 0 \text{ or } n \\ 0, & \text{else} \end{cases}. \tag{53}
$$

下面将上面的两覆盖的概念推广至多个覆盖. 称$\{U_i\}$是M的好覆盖，若非空$U_{i_1} \cap \cdots \cap U_{i_k} \simeq \mathbb{R}^m (1 \leq k \leq n)$. 特别地，可以构造两两之间相交连通的好覆盖.

定理(好覆盖定理). 设M有好的覆盖，则$\dim H^q_{dR}(M) < \infty, \forall 0 \leq q \leq m$.

证明： 对k归纳证明$\dim H_{dR}^q\left(U_{i_1}\cup\cdots\cup U_{i_k}\right)<\infty$. 定理成立.

$k=1$, 则$M=U_1\simeq\mathbb{R}^m$, 由 Poincare 引理，$H_{dR}^q(M)=0,\forall q\geq 1, H_{dR}^0(M)\simeq\mathbb{R}$.

$k\to k+1$, 设$V=\cup_{j=1}^k U_{i_j}$, 则$M=U_{i_{k+1}}\cup V$. 由归纳假设，$\dim H_{dR}^q(V)<\infty,\forall q\geq 0$. 由 MV 序列

$$\ldots\to H_{dR}^{q-1}\left(U_{i_{k+1}}\cap V\right)\to H_{dR}^q(M)\to H_{dR}^q\left(U_{i_{k+1}}\right)\oplus H_{dR}^q(V)\to H_{dR}^q\left(U_{i_{k+1}}\cap V\right)\to\ldots \tag{54}$$

由归纳假设，$\dim H_{dR}^{q-1}\left(U_{i_{k+1}}\cap V\right)<\infty$ ($\left(U_{i_{k+1}}\cap U_{i_1}\right)\cup\cdots\cup\left(U_{i_{k+1}}\cap U_{i_k}\right)$是好覆盖), $\dim H_{dR}^q\left(U_{i_{k+1}}\cap V\right)<\infty$. 也由归纳假设，$H_{dR}^q\left(U_{i_{k+1}}\right)\oplus H_{dR}^q(V)$也是有限维的. 由正合列的性质，$\dim H_{dR}^q(M)<\infty$.

$\blacksquare$

定理(推论). 若M紧致，则$\dim H_{dR}^q(M)<\infty,\forall 0\leq q\leq m$. M有好的覆盖.

4. 同伦

下面给出一个稍微比同胚弱一点，但足以保持正合列的概念——同伦.

定义(同伦). 设$f_0,f_1:M\to N$是C^∞映射，称f_0,f_1是C^∞同伦的，若$\exists F:M\times\mathbb{R}\to N$为$C^\infty$映射，$F(\cdot,0)=f_0$,$F(\cdot,1)=f_1$.

定理(同伦映射诱导了同构). 设f_0,f_1是光滑同伦的，则$[f_0^*]=[f_1^*]:H_{dR}^i(N)\to H_{dR}^i(M)$.

4 ▶ De Rham 同调

为了证明上述定理，我们需要引入链同伦的概念.

定义(链同伦). 设$f^\cdot, g^\cdot : A^\cdot \to B^\cdot$是两个链映射，称$f, g$是**链同伦**，若存在一族线性映射$H^i : A^i \to B^{i-1}$, s.t. $f^i - g^i = d^{i-1} \circ H^i - H^{i+1} \circ d^i$.

$$
\begin{tikzcd}
A^{i-1} \arrow[r, "d"] & A^i \arrow[r, "d"] \arrow[dl, "H^i"'] \arrow[d, "f^i - g^i"] & A^{i+1} \arrow[dl, "H^{i+1}"] \\
B^{i-1} \arrow[r, "d"] & B^i \arrow[r, "d"] & B^{i+1}
\end{tikzcd}
$$

定理(链同伦诱导的等价类). 设f, g是链同伦的，则$[f] = [g]$.

证明： 即证$[f^i] = [g^i] : H^i(A^\cdot) \to H^i(B^\cdot)$. $\forall [a] \in H^i(A^\cdot), da = 0$. 由定义$[f^i]([a]) = [f^i(a)]$, $[g^i]([a]) = [g^i(a)]$. 由链同伦定义，$f^i(a) - g^i(a) = d(H^i(a)) - H^{i+1}(da) = d(H^i a)$, 故$[f^i(a)] = [g^i(a)]$.

■

下面给出命题的证明。

引理(找出链同伦中的H). 定义

$$\begin{aligned} \pi &: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n, \quad (x,t) \mapsto x, \\ s &: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \quad x \mapsto (x,0). \end{aligned} \tag{55}$$

则∃线性$K : A^i(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}) \to A^{i-1}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$满足$\mathrm{id} - \pi^* \circ s^* = \pm dK \pm Kd$. 即$s^* \circ \pi^* = \pi^* \circ s^* = \mathrm{id}$

证明： $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$上的外形式可写成如下两种形式的线性组合 i) $\pi^*(\varphi)f(x,t), \varphi \in A^r(\mathbb{R}^n)$, ii) $\pi^*(\psi) \wedge f(x,t)dt, \psi \in A^{r-1}(\mathbb{R}^n)$.

令 i) $K(\pi^*(\varphi)f(x,t)) = 0$, ii) $K(\pi^*(\psi) \wedge f(x,t)dt) = \pi^*(\psi)\left(\int_0^t f(x,s)ds\right)$. 验证即可.

i) $w = \pi^*(\varphi)f(x,t)$, 则$dw = d(\pi^*(\varphi))f(x,t) + (-1)^r \pi^*(\varphi) \wedge df(x,t)$. $K(dw) = (-1)^r \pi^*(\varphi) \int_0^t \frac{\partial f(x,s)}{\partial s} ds =$ $(-1)^r \pi^*(\varphi)(f(x,t) - f(x,0)) = (-1)^r (w - \pi^* \circ s^* w)$. $Kw = 0$, 故$d(Kw) = 0$. 于是$d(Kw) + K(dw) = (-1)^r (w - \pi^* \circ s^* w)$.

ii) $w = \pi^* \psi \wedge f(x,t)dt$. 则$d(Kw) = d\pi^*(\psi) \int_0^t f(x,s)ds + (-1)^{r-1} \pi^*(\psi) \wedge \left[\int_0^t \frac{\partial f(x,s)}{\partial x} ds\right] dx + (-1)^{r-1} \pi^*(\psi) \wedge f(x,t)dt$, 而 $dw = \pi^*(d\psi) \wedge f(x,t)dt + (-1)^{r-1} \pi^*(\psi) \wedge \frac{\partial f(x,t)}{\partial x} dx \wedge dt$, 从而$K(dw) = \pi^*(d\psi) \int_0^t f(x,s)ds + (-1)^{r-1} \pi^*(\psi) \wedge dx \int_0^t \frac{\partial f(x,s)}{\partial x} ds$, 于是

$$d(Kw) - K(dw) = (-1)^r w \tag{56}$$

事实上，$w = (d(Kw) - K(dw))(-1)^{r-1}$.

■

4 ▶ De Rham 同调

定理(推论). 对$M \times \mathbb{R} \xrightarrow{\pi} M$, $M \xrightarrow{s} M \times \mathbb{R}$, 则$[\pi^*] : H^i_{dR}(M) \to H^i_{dR}(M \times \mathbb{R})$以及$[s^*] : H^i_{dR}(M \times \mathbb{R}) \to H^i_{dR}(M)$互为逆映射.

证明: $\forall [w] \in H^i_{dR}(M \times \mathbb{R})$, 可定义$K$满足$w - \pi^* \circ s^* w = dKw + Kdw$, 则$[\mathrm{id}] - [\pi^*] \circ [s^*] = 0$, 同理可证$[\mathrm{id}] - [s^*] \circ [\pi^*] = 0$.

■

命题的证明如下。

证明: 设$S_i : M \to M \times \mathbb{R}$, $S_i(p) = (p, i)$, $i = 0, 1$. 则$f_i = F \circ S_i$. 由上述引理, $[S_i^*]$均为$[\pi^*]$的逆($\pi : M \times \mathbb{R} \to M$), 即$[S_0^*] = [S_1^*]$. 从而$[f_0^*] = [s_0^* \circ F^*] \overset{函子}{=} [s_0^*] \circ [F^*] = [s_1^*] \circ [F^*] = [S_1^* \circ F^*] = [f_1^*]$.

$$\begin{tikzcd} & M \times \mathbb{R} \arrow[dr, "F"] & \\ M \arrow[ur, "S_0"] \arrow[dr, "S_1"'] & & N \\ & M \times \mathbb{R} \arrow[ur, "F"'] & \end{tikzcd}$$

■

也可定义$H^i : A^i(M) \to A^{i-1}(N)$, s.t. $f_1^* - f_0^* = \pm dH \pm Hd$. 这可以得到另一种证明. 目前我们还未引入积分.

4 ▶ De Rham 同调

例($\mathbb{R}^n - \{0\}$上的形式). 证明$\mathbb{R}^n - \{0\}$与S^{n-1}同伦等价. 从而$H^i(\mathbb{R}^n - \{0\}) \cong H^i(S^{n-1})$.

5. Poincare 对偶

本节我们希望证明：若M是**可定向**的**紧致**流形，则$H^i_{dR}(M) \simeq H^{m-i}_{dR}(M), 0 \leq i \leq m$. 证明要使用数学归纳法。在证明之前，我们需先引入紧支集同调，即考察紧支集上的微分形式$A^*_c(M) = \{w \in A^*(M) : \mathrm{supp} w \text{紧}\}$. 相应的同调群记为$H^*_c(M)$.

例(简单情形). $H^0_c(M) = 0, H^1_c(M) \simeq \mathbb{R}$.

同样地，由之前的 MV 序列定义，我们有, $\forall w \in A^*_c(U \cap V)$, 自动地，有$w \in A^*_c(U), A^*_c(V)$. 同样地，$\forall w \in A^*_c(U)$, 自动地有$w \in A^*_c(U \cup V)$.

$$\begin{tikzcd} & A^*_c(U) \arrow[dr, bend left, "\subset"] & \\ A^*_c(U \cap V) \arrow[ur, bend left, "\subset"] \arrow[dr, bend right, "\subset"'] & & A^*_c(U \cup V) \\ & A^*_c(V) \arrow[ur, bend right, "\subset"'] & \end{tikzcd}$$

于是有下面的

定理(紧支集上同调群).

$$
\begin{gathered}
0 \to A_c^*(U \cap V) \xrightarrow{i} A_c^*(U) \oplus A_c^*(V) \xrightarrow{\delta} A_c^*(U \cup V) \to 0 \\
w \overset{i}{\mapsto} (-w, w), \quad (\sigma, \tau) \overset{\delta}{\mapsto} \sigma + \tau
\end{gathered} \tag{57}
$$

是正合的.

证明： 与之前类似. i) i单的， ii) δ满的， iii) $\mathrm{Im} i = \ker \delta$. 只需注意紧支集的性质即可. 只需证$\ker \delta \subset \mathrm{Im} i$. $\forall (\sigma, \tau) \in \ker \delta, \sigma + \tau = 0$, 从而可知$\mathrm{supp}\sigma = \mathrm{supp}\tau \subset U \cap V$. 只需令$w = \tau$即可。

■

上述段正合列可以诱导出长正合列

$$
\begin{aligned}
0 \to H_c^0(U \cap V) \xrightarrow{i} H_c^0(U) \oplus H_c^0(V) \xrightarrow{\delta} H_c^0(U \cup V) \xrightarrow{d^*} \\
\xrightarrow{d^*} H_c^1(U \cap V) \to \ldots
\end{aligned} \tag{58}
$$

定义(正常映射). 若$f: M \to N$满足$\forall$紧集$K \subset N$, $f^{-1}(K)$是紧的，则称f是正常映射.

当f正常映射时，其诱导了$f^*: A_c^*(N) \to A_c^*(M)$. 这是因为，给定$w \in A_c^*(N)$, 若$w_{f(p)} = 0$, 则$(f^*w)_p = w_{f(p)} \circ f = 0$, 从而$\mathrm{supp}\ (f^*w) \subset f^{-1}(\mathrm{supp}\ w)$. 由于$f$是正常映射，$f^{-1}(\mathrm{supp}\ w)$是紧的，于是$\mathrm{supp}\ (f^*w)$是紧集的闭子集，也是紧的，故$f^*w \in A_c^*(M)$.

当$U \xrightarrow{i} M$嵌入，是开子流形，则$i_*: A_c^*(U) \to A_c^*(M)$.

考虑上面的$\pi: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n, \pi(x,t) = x$来构造链同伦.

定义(π的推前, e的推前). 定义$\pi_*: A_c^*(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}) \to A_c^{*-1}(\mathbb{R}^n)$如下

i) $\pi^*\varphi f(x,t) \overset{\pi_*}{\mapsto} 0$,

ii) $\pi^*\psi \wedge f(x,t)dt \overset{\pi_*}{\mapsto} \pi^*\psi \cdot \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,t)dt\right)$.

定义$e_*: A_c^{*-1}(\mathbb{R}^n) \to A_c^*(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$为：$e_*(\varphi) = \varphi \wedge e$, 其中$e \in A_c^1(\mathbb{R})$, 满足$\int_{\mathbb{R}} e = 1$.

定理(类似的K的构造，应用于链同伦). $\exists K: A_c^r(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}) \to A_c^{r-1}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$满足$\mathrm{id} - e_* \circ \pi_* = \pm(dK + Kd)$.

$(\pi_* \circ e_*)(\varphi) = \pi_*(\varphi \wedge e) = \varphi \int_{\mathbb{R}} e = \varphi$.

证明： 令$K: \varphi f(x,t) \mapsto 0$, 以及$\varphi \wedge f(x,t)dt \mapsto \varphi \int_{-\infty}^{t} f(x,s)ds - \varphi \int_{\mathbb{R}} f(x,t)dt \int_{-\infty}^{t} e$

代入验证.

■

定理(推论). π_*, e_*给出$H_c^*(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R})$与$H_c^{*-1}(\mathbb{R}^n)$的同构. 从而

$$\begin{cases}H_c^1(\mathbb{R})\cong\mathbb{R}\\ H_c^0(\mathbb{R})=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}H_c^2(\mathbb{R}^2)\cong H_c^1(\mathbb{R})\cong\mathbb{R}\\ H_c^1(\mathbb{R}^2)\cong H_c^0(\mathbb{R})=0\end{cases}\Rightarrow\cdots\Rightarrow H_c^k(\mathbb{R}^n)\cong\begin{cases}\mathbb{R}, & k=n\\ 0, & k\neq n\end{cases}\tag{59}$$

定理(推论). 上述K的构造关于φ是线性的，从而$H_c^*(M\times\mathbb{R})\cong H_c^{*-1}(M)$

定义(配对映射). 设M是可定向的紧致$m-$流形($M=\cup_{i=1}^N U_i.$)，定义配对 $H_{dR}^q(M)\times H_c^{m-q}(M)\to\mathbb{R}$为

$$([\alpha],[\beta])\mapsto\int_M\alpha\wedge\beta.\tag{60}$$

这是良定义的. $\forall\alpha_1-\alpha_2=d\gamma$, $\int_M(\alpha_1)\wedge\beta-\int_M\alpha_2\wedge\beta=\int_M d\gamma\wedge\beta=\int_M d(\gamma\wedge\beta)-\gamma\wedge\underbrace{d\beta}_{=0}\overset{\text{不带边}}{=}0$, $\forall\beta_1-\beta_2=dw$, $\mathrm{supp}\ w$紧, $\int_M\alpha\wedge\beta_1-\int_M\alpha\wedge\beta_2=\int_M\alpha\wedge dw=\pm\int_M d(\alpha\wedge w)\overset{w|_{\partial M}=0}{=}0.$

引理(双线性形式自然诱导的同构). 设V,W是有限维的向量空间，$\theta:V\times W\to\mathbb{R}$双线性，设$\forall v\neq0,\exists w\in W,\theta(v,w)\neq0$(保证了$f$单射), 以及反过来$\forall w\neq0,\exists v\in V,\theta(v,w)\neq0$. 则$\theta$是非退化的，其诱导了同构$f:V\xrightarrow{\sim}W^*$, $f(v)(w):=\theta(v,w)$.

定理(由配对映射诱导的同构). 上述定义的配对映射是非退化的，从而其诱导了$H^q_{dR}(M)\cong(H_c^{m-q}(M))^*$. 特别地，若$M$紧致，则$H^q_{dR}(M)\cong(H_{dR}^{m-q}(M))^*\cong H_{dR}^{m-q}(M)$.

证明： 归纳法. 记$M=\cup_{i=1}^N U_i, U=\cup_{i=1}^k U_i, V=U_{k+1}$. 对$k$归纳.

i) $k=1$. 已成立.

ii) $k\to k+1$. 设$W=U\cap V$. 由 MV 序列，有下列交换图:

$$\begin{array}{ccccccccc}
H^{q-1}_{dR}(U)\oplus H^{q-1}_{dR}(V) & \longrightarrow & H^{q-1}_{dR}(U\cap V) & \longrightarrow & H^{q}_{dR}(U\cup V) & \longrightarrow & H^{q}_{dR}(U)\oplus H^{q}_{dR}(V) & \longrightarrow & H^{q}_{dR}(U\cap V) \\
\alpha\downarrow & & \beta\downarrow & & \gamma\downarrow & & \delta\downarrow & & \eta\downarrow \\
(H_c^{m-q+1}(U)\oplus H_c^{m-q+1}(V))^* & \longrightarrow & (H_c^{m-q+1}(U\cap V))^* & \longrightarrow & (H_c^{m-q}(U\cup V))^* & \longrightarrow & (H_c^{m-q}(U)\oplus H_c^{m-q}(V))^* & \longrightarrow & (H_c^{m-q}(U\cap V))^*
\end{array}$$

由归纳假设，α,β,δ,η均为同构. 由五引理，γ也是同构.

■

需要下面的引理.

引理(可交换).

$$
\begin{array}{ccccccc}
H^q_{dR}(U\cup V) & \longrightarrow & H^q_{dR}(U)\oplus H^q_{dR}(V) & \longrightarrow & H^q_{dR}(U\cap V) & \longrightarrow & H^q_{dR}(U\cup V)\\
\otimes & & \otimes & & \otimes & & \otimes\\
H^{m-q}_c(U\cup V) & \longleftarrow & H^{m-q}_c(U)\oplus H^{m-q}_c(V) & \leftarrow & H^{m-q}_c(U\cap V) & \longleftarrow & H^{m-q-1}_c(U\cup V)\\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow\\
\mathbb{R} & & \mathbb{R} & & \mathbb{R} & & \mathbb{R}
\end{array}
$$

是可交换的图表.

引理(5).

$$
\begin{array}{ccccccccc}
A_1 & \to & A_2 & \to & A_3 & \to & A_4 & \to & A_5\\
\alpha\downarrow & & \beta\downarrow & & \gamma\downarrow & & \delta\downarrow & & \eta\downarrow\\
B_1 & \to & B_2 & \to & B_3 & \to & B_4 & \to & B_5
\end{array}
$$

行正合，若α,β,δ,η是同构，则γ也是同构.

记$b_q=\dim_{\mathbb{R}} H^q_{dR}(M)$, 则$b_q=b^c_{m-q}$.

例(). 设M是紧流形，α是M上的1形式，对所有光滑映射$f:S^1\to M$, 有$\int_{S^1} f^*\alpha=0$, 证明α是恰当的.

6. 映射度

设M, N是可定向连通的紧致m –流形，由 Poincare 对偶，$H^m_{dR}(M) \cong H^0_{dR}(M) \cong \mathbb{R}$, 其生成元$[w]$, $\int_M w = 1$.

设$f: M \to N$是光滑映射，则$f^*: H^m_{dR}(N) \to H^m_{dR}(M)$, 任取$\alpha \in A^m(M)$, $\int_N \alpha = 1$. 称 $\int_M f^*\alpha \in \mathbb{R}$是$f$的**映射度**(degree of map).

事实上$[f^*\alpha] = \deg(f)[w] \Leftrightarrow \int_M f^*\alpha - (\deg\ fw) = 0 \Leftrightarrow \int_M f^*\alpha = \deg\ f$.

定理(). $\deg\ f \in \mathbb{Z}$.

对$f: M \to N$, $p \in M$称为f的正则点，若f_{*p}是同构. $q \in N$称为f的正则值，若$\forall p \in f^{-1}(q)$, p是f的正则点.

当q是正则值时，$f^{-1}(q)$是M的离散子集，（紧集下）是有限集.

证明： 取f正则值q，则$f^{-1}(q) = \{p_1, \cdots, p_k\}$, 每个$p_i$处有开域$U_i$, s.t. $f(U_i)$为q处开邻域，且$f: U_i \to f(U_i)$是同胚. 取$V \subset N$为q处开邻域，s.t. $f^{-1}(V) = \cup_{i=1}^k U_i$. 取$\alpha \in A^m(N)$, supp$\alpha \subset V$, $\int_N \alpha = 1$. 则 $\int_M f^*\alpha = \sum_{i=1}^k \int_{U_i} f^*\alpha = k$, 故映射度为整数. ∎

映射度和多项式的关系. 设$f(z)=\sum_{i=0}^n a_n z^n$, $a_i\in\mathbb{C}$, $a_n\neq 0$. 将f延拓$\hat{f}:S^2=\mathbb{C}\cup\{\infty\}\to S^2$, 且$\hat{f}(\infty)=\infty$, 则$\deg\left(\hat{f}\right)=n$.

定理(). 设$f:M\to N$是光滑映射，则$S=\{q\in N:q$不是正则值$\}$为零测集.

证明： 记$A=\{p\in M:p$不是正则点$\}$，$S=f(A)$

取坐标卡覆盖$M=\cup_{i=1}^\infty U_i$, $N=\cup_{i-1}^\infty V_i$, 且$f(U_i)\subset V_i$（可数多个可数的并仍可数）. $A=\cup_{i=1}^\infty(A\cap U_i)$, 只需证明$f(A\cap U_i)$是零测的.

设$f:U(\subset\mathbb{R}^m)\to\mathbb{R}^n$是光滑映射. 记$\mathrm{Crit}(f)=\{x\in U:\mathrm{rank}\ Df(x)<n\}$.

i) 若 $m<n$, 则$\mathrm{Crit}(f)=U$, 故$f(U)$是零测的. (使用覆盖就可以了)

ii) 先证明$m=n$情形. $\mathrm{Crit}(f)=\{x\in U:\det\ Df(x)=0\}$. 设$U=(-1,1)^m$，$C_r=(-r,r)^m$, $r<1$. $\overline{C}_r$是U的紧子集，只需证明$f\left(\mathrm{Crit}(f)\cap\overline{C}_r\right)$是零测的. 对$f\left(\mathrm{Crit}(f)\cap\overline{C}_r\right)$是零测的.

将C_r划分成边长为δ的共$\left(2\frac{r}{\delta}\right)^m$个立方体，挑出与$\mathrm{Crit}(f)$相交的小立方体，记为$I_j$. $\exists x_j\in I_j$, $\det\ Df\left(x_j\right)=0$. $\forall x\in I_j$, $\left|f(x)-\left(f\left(x_j\right)+Df\left(x_j\right)\left(x-x_j\right)\right)\right|\le O\left(\left|x-x_j\right|^2\right)\le C\delta^2$.

由于$Df\left(x_j\right)$退化，$\mathrm{Im}\left(Df\left(x_j\right)\right)$是$m-1$维子空间（若更小则可以扩张），注意到$\left|Df\left(x_j\right)\left(x-x_j\right)\right|\le C\delta$, 则$f\left(I_j\right)$包含在一个底面为$C\delta$的$m-1$维矩体，高为$C\delta^2$的区域. conger $\left|f\left(I_j\right)\right|\le(C\delta)^{m-1}\tilde{C}\delta^2=C\delta^{m+1}$.

从而$\left|f(\mathrm{Crit}(f)\cap C_r)\right|\le\sum_{I_j\cap\ \mathrm{Crit}(f)\neq\emptyset}\left|f\left(I_j\right)\right|\le C\delta^{m+1}((2r)/\delta)^m=\le C\delta$.

iii) 一般地$m > n$, 对m归纳. 令$A_1(x) = \left\{x \in U : Df(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial f^i}{\partial x^j} = 0\right\} \subset \mathrm{Crit(f)}$. $A_k = \left\{x \in U : \frac{\partial^k f}{\partial x^{\alpha_1} \cdots x^{\alpha_m}}(x) = 0, \sum_{i=1}^m |\alpha_i| \leq k\right\}$

则$\mathrm{Crit}(f) \supset A_1 \supset A_2 \supset \cdots$. 由归纳假设，只需证

1) $f(\mathrm{Crit}(f) - A_1)$是零测的. $x_0 \in \mathrm{Crit}(f) - A_1$, 则$x_0$在某一个维度偏导数不为0. 不妨$\frac{\partial f^1}{\partial x^1}(x_0) \neq 0$. 令$h(x) = (f^1(x), x^2, \cdots, x^m)$, 则$Dh(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1}(x_0) & * \\ 0 & I_\alpha \end{pmatrix}$非退化. 由反函数定理，有$x_0$的开邻域$V$, s.t. $h(V) = V'$是开集，$h : V \to V'$是光滑同胚. 令$g = f \circ h^{-1} : V' \to \mathbb{R}^n$. 易知$g$ $\mathrm{Crit}(g) = f(\mathrm{Crit}(f) - A_1)$

$\forall (t, x^2, \cdots, x^m) \in V', g(t, x^2, \cdots, x^m) = (t,)$

2)

3) 只需证明$\forall k, k > \frac{n}{m} - 1$, $f(A_k - A_{k+1})$是零测的. 这里的证明类似. $A_k \cap I_j \neq \emptyset, \forall x \in I_j, |f(x) - f(x_j)| \leq O\left(|x - x_j|^{k+1}\right)$, 从而$|f(I_j)| \leq (C\delta^{k+1})^n$. 于是$|f(A_k \cap C_r)| \leq \sum_{I_j \cap A_k \neq \emptyset} |f(I_j)| \leq C\delta^{(k+1)n}((2r)/\delta)^m = \leq C\delta^{((k+1)n-m}$.

■