微分流形

Differential Manifolds

涂轩丞

浙江大学

目 录

目 录

1 欧式空间的映射

Suppose $U \subset \mathbb{R}^n$ is an open set, $F : U \to \mathbb{R}^m$, defined by $F(x) = y$, where $x = (x^1, \cdots, x^n)$, $y = (y^1, \cdots, y^m)$. Use $\pi^\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ to be the projection to the α-th coordinate, i.e. $\pi^\alpha(x^1, \cdots, x^n) = x^\alpha$. Then $y = F(x)$ could be represented as

$$y = F(x) = (f^1(x), \cdots, f^n(x)), \quad x \in U \tag{1}$$

where $f^\alpha = \pi^\alpha \circ F : U \to \mathbb{R}$, which is called the component function.

If each component function of F is partialerentiable $(C^k, C^\infty, C^\omega)$ at $a \in U$, then we call F is partialerentiable $(C^k, C^\infty, C^\omega)$ at $a \in U$.

If F is partialerentiable on U, then

$$\frac{\partial(f^1, \cdots, f^m)}{\partial(x^1, \cdots, x^n)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f^1}{\partial x^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f^m}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f^m}{\partial x^n} \end{bmatrix} \tag{2}$$

whose each element is a function on U. We call the above matrix **Jacobi matrix**, denoted DF. When F is C^k, DF is C^{k-1}.

The following theorem is parallel to that in one-variable function.

定理. Suppose $U \subset \mathbb{R}^n$ is an open set, map $F : U \to \mathbb{R}^m$ is partialerentiable, iff there exsits a linear map $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ and $R(x, a) = (r^1(x, a), \cdots, r^m(x, a))$ such that

$$F(x) = F(a) + A(x - a) + \parallel x - a \parallel R(x, a), \quad \lim_{x \to a} \parallel R(x, a) \parallel = 0. \tag{3}$$

证明:

∎

From the proof, we could know that the above A could be denoted by $DF(a)$.

Suppose U, V are open subsets of $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$, maps $F : U \to V$, $G : V \to \mathbb{R}^p$, then the map $H = G \circ F : U \to \mathbb{R}^p$ is called the composition of F and G. Parallel to the composition of one-variable functions, we have the following chain rules.

定理(Chain rules). Suppose F, G, H are defined as above. If F is partialerentiable at $a \in U$, and G is partialerentiable at $F(a) \in V$, then H is partialerentiable at a and holds the following equation.

$$GH(a) = DG(F(a)) \cdot DF(a). \tag{4}$$

证明： By definitions.

■

Readers could prove that if F and G are C^k maps, then $H = G \circ F$ is also a C^k map.

Example. Suppose $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ is a homogeneous linear transformation, i.e.

$$F(x) = A \cdot x, \quad x \in \mathbb{R}^m \tag{5}$$

or

$$f^i = \sum_{j=1}^{m} a^i_j x^j. \tag{6}$$

Easy to show that $DF(x) = A$. If A is inversible, then F is a partialeomorphism.

定理(Inverse function theorem). Suppose $U \subset \mathbb{R}^m$ is an open set, $F : U \to \mathbb{R}^m$ is a C^k map. If for $a \in U$, $DF(a)$ is inversible, then there exists an open neighborhood $W \in U$, such that $F : W \to F(W) = V$ is a C^k partialeomorphism. Furthermore, if $x \in W$, $y = F(x)$, then the partialerential of F^{-1} at y is

$$DF^{-1}(y) = (DF(x))^{-1}. \tag{7}$$

Without generality, in the following proof, we assume $F(0) = 0$ and $DF(0) = I$.

引理. There exsits an open neighborhood W of a, such that $F\mid_W : W \to \mathbb{R}^m$ is injective. Furthermore, for all $x, y \in W$,

$$2 \parallel F(x) - F(y) \parallel \geq \parallel x - y \parallel . \tag{8}$$

证明： for Lemma 1. Define $G : U \to \mathbb{R}^m$ by $G(x) = x - F(x)$, which satisfies $G(0) = 0$ and $DG(0) = \mathbf{0}$. Since $F \in C^1(U)$, we have $DG(x)$ is continuous. Therefore, there exists a real number $r > 0$, such that $\overline{B}_r(0) \subset U$ and each element of $DG(x)$ is less than $1/(2m)$ for $x \in \overline{B}_r(0)$. Thus

$$Tr(DG^T(x)DG(x)) \leq \frac{1}{4m^2} \cdot m^2 \leq \frac{1}{4}, \Rightarrow \parallel DG(x) \parallel \leq \frac{1}{2}, \quad x \in \overline{B}_r(0). \tag{9}$$

For all $x_1, x_2 \in \overline{B}_r(0)$, by changing the partialerence into integral and chain rule

$$G(x_2)-G(x_1)=\int_0^1 \frac{d}{dt}[G(x_1+(x_2-x_1)t)]dt=\int_0^1 DG(x_1+(x_2-x_1)t)(x_2-x_1)dt \tag{10}$$

take norm and we have

$$\| G(x_2)-G(x_1) \| \leq \int_0^1 \| DG(x_1+(x_2-x_1)t) \| \| x_2-x_1 \| dt \leq 1/2 \| x_2-x_1 \| . \tag{11}$$

At last, by introducing triangle inequality, we have

$$1/2 \| x_2-x_1 \| \geq \| (x_2-x_1)-(F(x_2)-F(x_1)) \| \geq \| x_2-x_1 \| - \| F(x_2)-F(x_1) \| \tag{12}$$

and we get the result.

■

引理. Suppose $W \subset \mathbb{R}^m$ is an open set, and map $F: W \to \mathbb{R}^m$ which satisfies for all $x \in W$, $DF(x)$ is inversible, then $F(W)$ is an open set, i.e. F is an open map. If F is one-to-one, then F^{-1} is continuous.

证明： for Lemma 2.

We only need to prove that for any $a \in W$, $F(W)$ is an open neighborhood of $F(a)$. To be more specific, by translation, for any ball $\overline{B}_r(0) \subset W$, $F\left(\overline{B}_r(0)\right) \subset \overline{B}_{r/2}(0) \subset F(W)$.

By Lemma 1, there exists $r > 0$, such that $\| G(x_2) - G(x_1) \| \leq 1/2 \| x_2 - x_1 \|$ for $x \in \overline{B}_r(0)$. Let $x_2 = 0$, $G(x_2) = 0$, and we have $\| G(x_1) \| \leq 1/2 \| x_1 \|$. For a given $y \in \overline{B}_{r/2}(0)$, define $T : \overline{B}_r(0) \to \mathbb{R}^m$, by $T(x) = y - G(x)$. Actually, since

$$\| y - G(x) \| \leq \| y \| + \| G(x) \| \leq r/2 + r/2 = r, \quad \forall x \in \overline{B}_r(0) \tag{13}$$

So T actually maps into itself. Since $\| T(x_2) - T(x_1) \| \leq \| G(x_2) - G(x_1) \| \leq 1/2 \| x_2 - x_1 \|$, T is a contraction map, so there exists a unique fixed point $x \in \overline{B}_r(0)$ such that $T(x) = x$, which means $y = F(x)$, meaning $y \in F(W)$. The above contraction map method is usually used to proving the solution for an equation, i.e. the range of a function.

■

证明： for Theorem

Since $DF(x_0)$ is inversible, there exists an open neighborhood W of x_0 such that $|DF(x)| \neq 0$ for $x \in W$. By lemma 1, we have $F(x)\ |_W$ is injective. By lemma 3, $F(W)$ is open, so F is a homomorphism.

Denote H as the inverse of F. We first show that it is C^1. For any $x \in W$, let $y = F(x), y_0 = H(x_0)$, expand it at x_0,we have

$$\begin{aligned} & F(x) = F(x_0) + DF(x_0)(x - x_0) + o(\| x - x_0 \|), \\ & \Rightarrow y = y_0 + DF(H(y_0))(H(y) - H(y_0)) + o(\| H(y) - H(y_0) \|) \end{aligned} \tag{14}$$

so multiply both sides $DF(x_0)^{-1}$ since $|DF(x_0)| \neq 0$, we have

$$H(y) = H(y_0) + DF(x_0)^{-1}(y - y_0) + o(\| H(y) - H(y_0) \|) \tag{15}$$

the rest item could be $o(\| H(y)-H(y_0) \|)=o(\| y-y_0 \|)$ since $\| x-x_0 \| \leq 2 \| F(x)-F(x_0) \|$.

So we have $DH(y_0)=DF(x_0)^{-1}$.

Now we show that H is C^k. We prove by induction. Assume H is C^l for $l \leq k-1$, then by

$$DH=(DF \circ H)^{-1} \tag{16}$$

which means DH is C^l, thus H is C^{l+1}. Since F is C^k, we have H is C^k.

■

We have the following corollaries.

定理(Implicite function theorem). Suppose U, V are open subsets of $\mathbb{R}^m$ and $\mathbb{R}^n$. The map $F: U \times V \to \mathbb{R}^n$ is C^k. If for $x_0 \in U$, $y_0 \in V$, and map $y \mapsto f(x_0, y)$ whose partialerential at y_0, i.e $D_2 f(x_0, y_0)$ is inversible, then there exists a neighborhood $U_0 \subset U$ of x_0, and a uniquely determined C^k map $g: U_0 \to \mathbb{R}^n$, such that $g(x_0)=y_0$. Furthermore, for each $x \in U_0$, we have

$$f(x, g(x))=f(x_0, y_0). \tag{17}$$

证明： Similar to what we have in partialerential geometry, we consider a higher dimensional map $F: U \times V \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, $(x, y) \to (x, f(x, y))$, then

$$DF(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} I & 0 \\ D_1 f(x_0, y_0) & D_2 f(x_0, y_0) \end{bmatrix}, \tag{18}$$

since $D_2 f(x_0, y_0)$ is inversible, $DF(x_0, y_0)$ is inversible. Then by ;, there exists a small neighborhood $U_0 \times V_0$ of (x_0, y_0) such that F is its unique inverse map. Define projection $\pi : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $(x, y) \mapsto y$, and let

$$g(x) = \pi \circ F^{-1}(x, f(x_0, y_0)), \quad x_0 \in U_0 \tag{19}$$

so g is the desired map. This is because $F(x, g(x)) = (x, f(x, g(x))) = (x, f(x_0, y_0))$.

■

定理(Rank Theorem). Suppose A, B is open set on $\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n$, $F : A \to B$ is a C^k map, and $DF(x) = r$ for all $x \in A$. Assume $a \in A$, $b = F(a) \in B$, then there exist open neighborhood $A_0 \subset A$, $B_0 \subset B$ of A, B, and a C^k homeomorphism $u : A_0 \to U \subset \mathbb{R}^m$, $v : B_0 \to V \subset \mathbb{R}^n$, such that $v \circ F \circ u^{-1} : U \to V$ has the following form

$$v \circ F \circ u^{-1}(x^1, \cdots, x^m) = (x^1, \cdots, x^r, 0, \cdots, 0) \in \mathbb{R}^n. \tag{20}$$

目 录

1. 相容的坐标卡、坐标图册

定义(拓扑流形). M是一个n维**拓扑流形**，若对于每一个$p \in M$, 都存在一个开邻域$U, p \in U$, 以及同胚映射$\varphi: U \to \mathbb{R}^n$, 使得$\varphi(U)$是$\mathbb{R}^n$的开集。

一般我们假设M是一个 Hausdorff 空间，且满足A_2公理。上述的U, φ被称为**坐标卡、坐标邻域。**
我们具体分析φ, 因为其值域为$\mathbb{R}^n$, 故可以自然地使用坐标分量表达

$$\varphi(p) = (x^1(p), \cdots, x^n(p)) \tag{21}$$

其中$x^i : U \to \mathbb{R}$即为坐标分量函数。

下面我们讨论两个坐标卡之间的关系，并以此定义微分流形。设$(U, \varphi), (V, \psi)$是两个坐标卡，$U \cap V \neq \emptyset$, 则$\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$是欧氏空间之间的映射，可以用第一部分的原理来解释。

定义(C^k相容的坐标卡). 上述两个坐标卡被称为C^k相容的，如果$\psi \circ \varphi^{-1}$是C^k同胚. 若两个坐标卡的开邻域之间不交，则平凡地认为其是C^k相容.

有了上述的关系，我们便可以定义微分流形。

定义(微分流形). 设M是n维拓扑流形，若在M上存在一族坐标卡$\mathcal{U}=\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}_{\alpha\in J}$满足

(i) 覆盖性. $M=\bigcup\limits_{\alpha\in J}U_\alpha$.

(ii) 任意两个坐标卡是C^k相容的.

(iii) 若另外有一个坐标卡(U,φ), 满足对任意$\alpha\in J$, (U,φ)与$(U_\alpha,\varphi_\alpha)$都$C^k$相容，则$(U,\varphi)\in U$.

于是我们称$\mathcal{U}$是M上的C^k微分结构，称$(M,\mathcal{U})$是n维的微分流形. $\mathcal{U}$中的元素被称为容许坐标卡。

我们可以证明存在唯一的最大微分结构。

定理(微分结构的唯一性). 若$\mathcal{U}_0$是满足上述(i)(ii)的一族坐标卡，则存在唯一的C^k微分结构$\mathcal{U}\supset\mathcal{U}_0$.

例(S^n作为流形). 证明S^n在标准拓扑下是光滑流形.

2. 流形间的映射

定义(流形间的C^k映射). 设M,N分别是m,n维C^k流形，$F:M\to N$是连续映射。取$p\in M$, 称F是C^k映射，若存在M和N的坐标卡(U,φ)和(V,ψ)，使得$p\in U$, $f(p)\in V$, 且$f(U)\subset V$, $\hat{F}:=\psi\circ F\circ\varphi^{-1}$是$\mathbb{R}^m$到$\mathbb{R}^n$的$C^k$映射. 定义$F$在$p$处的秩为$\hat{F}$在$\varphi(p)$处的秩.

设$F:M\to N$是同胚，若F,F^{-1}都是C^k映射，则称F是C^k同胚映射。

若F在p处的秩为m, 则称F为浸入；若在p处的秩为n,则称F为淹没.

特别地，我们取$N=\mathbb{R}$, 以及标准拓扑，则F被称为C^k函数，其全体记为$C^k(M)$. 若取$M=(a,b)\subset\mathbb{R}$, F则被称为C^k曲线。

例(). 设M是连通流形，证明对M上任意两点p,q，都存在微分同胚$\varphi: M\to M$, s.t. $\varphi(p)=q$.

例(). M,N是连通紧致光滑流形，$f:M\to N$是淹没，证明：i) f是满射. ii) $\forall p,q\in N$, $f^{-1}(q), f^{-1}(p)$是微分同胚的流形.

定理(Uryson 引理). 设M是C^k流形，F,K分别是闭集和紧集，$F\cap K=\emptyset$, 则存在C^k函数g满足$g|_K=1$, $g|_F=0$, $g\in[0,1]$.

证明： 首先证明$M=\mathbb{R}^m$时命题成立. 首先对于任意给定的$B_p(r)$，存在径向对称函数$g\in C^\infty(\mathbb{R}^m)$，满足$g|_{B_p(\frac{r}{2})}\equiv 1$, $g|_{\mathbb{R}^m-B_p(r)}\equiv 0$，$g\in[0,1]$. 具体来说，可以令

$$h(t)=\begin{cases}0, & t\le 0\\ e^{-\frac{1}{t}}, & t>0\end{cases}, \tag{22}$$

从而$\lim\limits_{t\to 0^+}h(t)=0$, $\lim\limits_{t\to\infty}h(t)=1$, 且是一个$C^\infty$函数. 令

$$g(x)=\frac{h(r-|x|)}{h(r-|x|)+h(|x|-\frac{r}{2})}=\begin{cases}1, & |x|<r/2\\ 0, & |x|\geq r\end{cases} \tag{23}$$

并且g是一个C^∞函数.

下面利用紧集的性质. 任取$x\in K$, $\exists r_x$, s.t. $B_x(r_x)\cap F=\emptyset$. 由紧集，$\exists x_1,\cdots,x_N$, $\bigcup_{i=1}^N B_{x_i}\left(r_{x_i}/2\right)\supset K$. 由上面的性质，我们有对应的$g_i$满足$g_i|_{B_{x_i}(r_{x_i}/2)}=1$, $g_i|_{\mathbb{R}^m-B_{x_i}(r_i)}=0$. 令$g=1-\prod_{i=1}^N(1-g_i)$. 则$g$满足要求.

然后证明命题对于一般的情况也成立. $\forall x\in K$, 取包含x的坐标卡$(U,\psi;x^i)$, 取$r_x>0$, 使得$B_{\varphi(x)}(r_x)\subset\varphi(U)$, 且$\varphi^{-1}\left(B_{\varphi(x)}(r_x)\right)\cap F=\emptyset$. 在$B_{\varphi(x)}(r_x/2)$上，有对应的函数$g_x$满足条件，令

$$\tilde{g}_x(p)=\begin{cases}g_x(\varphi(p)), & p\in U\\ 0, & \text{else}\end{cases}. \tag{24}$$

则$\tilde{g}_x$是C^k函数（注意M是 Hausdorff 的，从而$\varphi^{-1}\left(\overline{B_x(r_x)}\right)$作为紧集是闭的. 不能由闭集的原像是闭集得到，因为这里的φ的连续性是在U的子空间拓扑下的.）再由K是紧的，得证.

■

特别地，$f:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$, $m<n$, 且$f(x^1,\cdots,x^m)=\left(x^1,\cdots,x^m,\underbrace{0,\cdots,0}_{n-m\text{个}}\right)$被称为典则浸入 (Canonical immersion).

定义(浸入子流形). 设$F: M \to N$是单浸入，则称M或$F(M)$是N的浸入子流形.

注意这里单射是保证了全局单的性质。读者可证浸入能够保证局部单的性质，从而局部上，根据子空间拓扑，F是同胚。

定义(正则子流形). 设N是n维C^k流形，$M \subset N$，若对任意$p \in M$, 存在N的坐标卡$(V, \psi), p \in V$, 使得$\psi(p) = 0, \psi(V \cap M) = \{(y^1, \cdots, y^n) \in \psi(V) : y^{m+1} = \cdots = y^n = 0\}$, 则称$M$是$N$的$m$维正则子流形.

对于正则子流形，我们可以得到其对应的坐标图册。

定理(正则子流形的坐标图册). 基于上述定义的正则子流形M, $(V \cap M, \psi|_{V \cap M})$是$M$上$C^k$相容的坐标图册.

特别地，若$F: M \to N$是C^k映射，定义图像$gr(F) = \{(p, F(p)) \in M \times N : p \in M\}$, 则其是$M \times N$的$m$维正则子流形。我们也可以构造图像对应的坐标卡。

例(图像作为正则子流形). 设M, N是光滑流形，$f: M \to N$是光滑映射，证明图像$gr(F) = \{(p, F(p)) \in M \times N : p \in M\}$是$M \times N$的正则子流形.

例(). 设M是N的闭正则子流形，证明M上的向量场可以延拓到N上. 并举例说明“闭”条件不可或缺.

下面给出浸入子流形和正则子流形之间的关系。这里通过嵌入这个概念连接。我们首先给出几个引理。

引理(1). 若$F: U\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$是$C^1$映射，且$\mathrm{rank}DF\equiv n$, 则$F$是开映射.

引理().

定理(浸入子流形和正则子流形). 设M,N分别是m,n维C^k流形，$F:M\to N$是单浸入，则$F(M)$是N的正则子流形，当且仅当F是嵌入。

我们常常用下面的定理证明一个流形是正则子流形.

定理(正则值判定). 设$f:M\to N$是C^k映射，$\mathrm{rank}\ f=r$, 则$\forall q\in f(M)$, $f^{-1}(q)$是M的$m-r$维闭正则子流形.

证明： 取$p\in f^{-1}(q)$, 由秩定理，存在M的包含p的坐标卡(U,φ), N的包含q的坐标卡(V,ψ), 使得$f(U)\subset V$, $\varphi(p)=\mathbf{0}_m$, $\psi(q)=\mathbf{0}_n$, 且$\hat f=\psi\circ f\circ\varphi^{-1}$满足

$$\hat f(x^1,\cdots,x^m)=\left(x^1,\cdots,x^r,\underbrace{0,\cdots,0}_{n-r\text{个}}\right)\tag{25}$$

此时$\hat f(\mathbf{0}_m)=\hat f(\varphi(p))=\psi(f(p))=\psi(q)$, 由上述坐标关系，有$\psi(q)=\mathbf{0}_n$, $\varphi(U\cap f^{-1}(q))=\hat f^{-1}(\mathbf{0})=\{(x^1,\cdots,x^m)\in\varphi(U):x^1=\cdots=x^r=0\}$

即子流形坐标卡, 剩余的$m-r$维可自由变动. 这里的$f^{-1}(q)$也被称为水平集(Level set).

■

例(一般线性群的子流形). 考虑正交群$O(n,\mathbb{R})=\left\{A=a_{ij}\in GL(n,\mathbb{R}):A^tA=I\right\}$.证明其为$GL(n,\mathbb{R})$的正则子流形.

证明: 定义映射$f:GL(n,\mathbb{R})\to \mathrm{Sym}(n,\mathbb{R})$, $f(A)=A^tA-I$, 其中$\mathrm{Sym}(n,\mathbb{R})$为$n\times n$的对称矩阵空间. 显然$O(n,\mathbb{R})=f^{-1}(0)$. 下面计算其秩. 取$A\in GL(n,\mathbb{R})$, 则$Df(A):T_A(GL(n,\mathbb{R}))\to T_{f(A)}(\mathrm{Sym}(n,\mathbb{R}))$为线性映射, 且由于它们是向量空间, 所以$T_A(GL(n,\mathbb{R}))\cong\mathbb{R}^{n^2}$, $T_{f(A)}(\mathrm{Sym}(n,\mathbb{R}))\cong\mathrm{Sym}(n,\mathbb{R})$. 对$X\in\mathbb{R}^{n^2}$, 计算

$$df_A(X)=\frac{d}{dt}[f(A+tX)]|_{t=0}=\frac{d}{dt}[(A+tX)^t(A+tX)-I]|_{t=0}=A^tX+X^tA \tag{26}$$

任给一个$Y\in\mathrm{Sym}(n,\mathbb{R})$, 令$X=\frac{1}{2}A^{-t}Y$, 则有$df_A(X)=Y$, 因此$Df(A)$是满射, 秩为$\frac{n(n+1)}{2}$, 从而正则子流形的维数是$n^2-\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$.

■

我们有下面的推论.

定理(推论). 设$f:M\to N$是淹没, 则$\forall q\in f(M)$, $f^{-1}(q)$是M的$m-r$维闭正则子流形.

注意几个反例。

3. 单位分解

先给出两个概念的定义.

定义(加细). 设U_α, U_β是X的两个开覆盖，若$\forall\alpha, \exists\beta$, s.t. $U_\alpha \subset U_\beta$, 则称U_α是U_β的**加细**.

定义(局部有限). 设X是拓扑空间，$\{U_\alpha : \alpha \in J\}$是一族子集，若$\forall p \in X, \exists W_p$开邻域，s.t. $\#\{\alpha \in J : U_\alpha \cap W_p \neq \emptyset\} < \infty$, 则称$\{U_\alpha\}_{\alpha\in J}$是局部有限的.

考虑流形上的映射，$f : M \to \mathbb{R}$, 记紧支集为$\mathrm{supp} f = \overline{\{x \in M : f(x) \neq 0\}}$, 我们引入下面的定义

定义(单位分解). M上的函数族$\{f_i\}_{i\geq 1}$被称为M上的单位分解，若其满足

(i) $f_i \geq 0$, 且$f_i \in C^k(M)$ $\forall i \geq 1$.

(ii) $\{\mathrm{supp} f_i\}$是M的局部有限的覆盖.

(iii) $\sum_{i=1}^{\infty} f_i(p) = 1, \forall p \in M$.

为了给出单位分解定理，我们先给出一个引理。

引理(寻找局部有限加细). 设A_α是M的开覆盖，则存在可数多个坐标卡$(U_j, \varphi_j), j \geq 1$, 使得 (i) $\{U_j\}$是$\{A_\alpha\}$的加细. (ii) $\{U_j\}$是局部有限的. (iii) $\varphi_j(U_j) = B_0^m(1)$, (iv) $\{V_j = \varphi_j^{-1}(B_0^m(\frac{1}{2}))\}$是$M$的开覆盖.

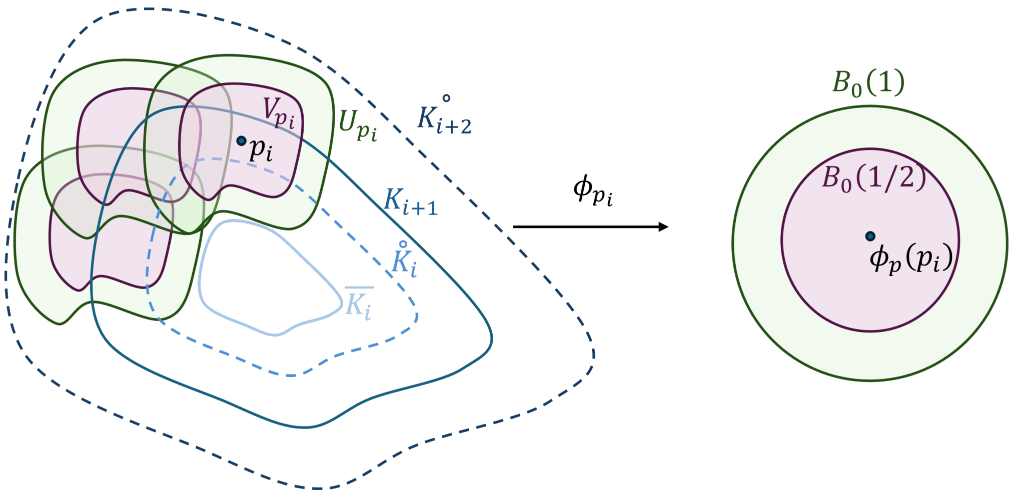
2 ▶ 微分流形

证明： 由于M是局部紧的，并且M具有可数基A_2，从而$\exists\{V_i\}_{i\geq 1}$开集, $M=\cup_{i=1}^{\infty} V_i$, 且$\overline{V_i}$是紧集. 下面基于此构造紧集列$K_i$，$K_0=\emptyset, K_1=\overline{V_1}$, 由于$K_1\subset\cup_{i=1}^{\infty} V_i$是紧集, 于是$\exists r>1$, s.t. $K_1\subset\cup_{i=1}^{r} V_i$. 取最小的$r$，令$K_2:=\overline{\cup_{i=1}^{r} V_i}=\cup_{i=1}^{r}\overline{V_i}$.

一般地，若K_i已经定义，则取最小的r，s.t. $K_i\subset\cup_{i=1}^{r} V_i$, 定义$K_{i+1}=\cup_{i=1}^{r}\overline{V_i}$. 如果出现$K_i=K_{i+1}$, 则$K_{i+1}=M$. 首先我们可以发现$K_i$的几个性质.

(i) $K_i\subset \mathring{K}_{i+1}$， (ii) $M=\cup_{i=1}^{\infty}\left(K_{i+1}-K_i\right)$ $(\cup_{i=1}^{l}\left(K_{i+1}-K_i\right)=K_l.)$

下面考虑$K_{i+1}-\mathring{K}_i\subset \mathring{K}_{i+2}-K_{i-1}$, 前者紧，后者开。任取$p\in A_\alpha\cap\left(\mathring{K}_{i+2}-K_{i-1}\right)$, 有坐标卡$(U_p,\varphi_p)$, s.t. $U_p\subset A_\alpha\cap\left(\mathring{K}_{i+2}-K_{i-1}\right)$, $\varphi_p(p)=0$, 且$\varphi_p(U_p)=B_0(1)$. 令$V_p=\varphi_p^{-1}\left(B_0\left(\frac{1}{2}\right)\right)$, 由$K_{i+1}-\mathring{K}_i$紧，存在有限个$V_{p_1},\cdots,V_{p_N}$, s.t. $\cup_{i=1}^{N} V_{p_i}\supset K_{i+1}-\mathring{K}_i$.



记$\mathcal{F}_i = \left\{V_{p_1}, \cdots, V_{p_N}\right\}$, 则可列个并覆盖$M$(iv). 令$\mathcal{G}_i = \left\{U_{p_1}, \cdots, U_{p_N}\right\}$, 从而$\cup_{i=1}^{\infty} \mathcal{G}_i$是$A_\alpha$的加细(i)。事实上，其是局部有限(ii)的。任取$p \in M$, $\exists i_0$, s.t. $p \in \mathring{K}_{i_0}$, 当$i \geq i_0 + 1$时，$\forall U \in \mathcal{G}_i, U \subset \mathring{K}_{i+2} - K_{i-1}$, 从而$U \cap V_i = \emptyset$, 从而与$p$相交的$U$只能来自于有限个$i$，从而局部有限性得证.

∎

定理(单位分解定理). 设A_α是M的开覆盖，则存在M上的单位分解$\{f_i\}_{i \geq 1}$, 使得$\{\mathrm{supp} f_i\}$是A_α的加细. 我们记f_i是从属于A_α的单位分解.

证明： 根据引理，对给定的开覆盖A_α, 有U_j是其加细，且V_j也是M开覆盖. 我们在每一个U_j, V_j上，利用之前的 Uryson 引理，存在M上的C^k函数f_j, s.t. $f_j|_{\overline{V_j}} = 1$, $f_j|_{M-U_j} = 0$, 从而$\mathrm{supp} f_j \subset U_j$，于是$\{\mathrm{supp} f_j\}$是$A_\alpha$的加细. $\mathrm{supp} f_j$是局部有限的，因为U_j是局部有限的，从而$\sum_j f_j$实际上是局部有限和。

令$f = \sum_j f_j$, 从而$\forall p \in M$, $f(p) \geq 1$, 从而$\sum_j f_j/j = 1$. 于是$g_j = f_j/f$符合要求.

∎

定理(流形嵌入). 设M是紧致的C^k流形，则存在$n \in \mathbb{N}^+$, 以及M到$\mathbb{R}^n$的嵌入.

目录

1. 函数芽与导数

定义流形上的函数芽如下。

定义(函数芽). 取$p\in M, U$是p的开邻域，$C^\infty(U)$为U上的光滑函数. 在函数族$\rho=\{(u,f):U$ 是开邻域, $f\in C^\infty(U)\}$上考虑一个等价关系$\sim$，若$(U,f),(V,g)\in\rho, \exists W\subset U\cap V$, 使得$f|_W=g|_W$.

我们记$C_p^\infty(U)=\rho/\sim$为p处的C^∞函数芽.

我们可以在这个空间上定义加法和乘法，继承于函数的加法和乘法。里面的代表元一般记作$[f]$，省去开邻域的书写(这便是主要目的)。不出现歧义的地方，我们直接取f为其中的元素.

定义(导数). 线性映射$D:C_p^\infty(M)\to\mathbb{R}$被称为导数，若其满足 Liebnitz 法则，即

$$D(fg)=Dfg(p)+Dgf(p) \tag{27}$$

这里的导数便是一般欧式空间上导数的推广，我们将其视为f的泛函.

引理(利用曲线定义导数). 任给光滑曲线$\gamma:(-\varepsilon,\varepsilon)\to M, \gamma(0)=p$, 则

$$D_{\gamma'(0)}:C_p^\infty\to\mathbb{R},\quad f\mapsto\left.\frac{\mathrm{d}(f\circ\gamma(t))}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \tag{28}$$

是导数.

证明: 需要验证其是良定义的. 当取 $f, g \in C_p^\infty(M)$, $f|_W = g|_W$, 代入验证即可. Leibnitz 性质继承于求导的链式法则.

■

设M是m维光滑流形，记$\mathrm{Der}(C_p^\infty(M)) = \{D : D\text{是}C_p^\infty\text{上的导数}\}$. 则我们自然定义$\mathrm{Der}(C_p^\infty(M))$上的线性结构，并证明其是$m$维线性空间.

证明: 其上的线性结构$D_1 + kD_2$定义为

$$(D_1 + kD_2)(f) = D_1(f) + kD_2(f) \tag{29}$$

容易得到$D_1 + kD_2 \in \mathrm{Der}(C_p^\infty(M))$.

下面利用流形的坐标卡寻找该空间的基. 取$p \in M$, 以及坐标卡(U, φ, x^i), 不妨令$\varphi(p) = 0$. 定义D_i为

$$D_i(f) = \frac{\partial f \circ \varphi^{-1}}{\partial x^i}|_{\varphi(p)} \tag{30}$$

注意上面是$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$上函数的偏导数，是有实际含义的. 则$D_i \in \mathrm{Der}(C_p^\infty(M))$. 事实上，取曲线$\gamma_i(t) = \varphi^{-1}\left(0, \cdots, 0, \underbrace{t}_{i}, 0, \cdots, 0\right)$, 第$i$个为变量，则$D_i = D_{\gamma_i'(0)}$. 可证明$\{D_1, \cdots, D_m\}$是线性无关的.

3 ▶ 切空间、切丛

具体来说，取函数芽$x^i=\hat{x}^i\circ\varphi$, 这里$\hat{x}^i:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$是坐标投影函数，即$\hat{x}^i(t^1,\cdots,t^m)=t^i$. 注意这里为了统一，$\hat{x}^i$表示$\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$的映射。之后，如果没有歧义，我们不加以区分$\hat{x}^i$和$x^i$. 也就是说，当没有作为求导符号时，$x^i$可以表示$M$上的函数芽，也可以表示欧氏空间中的坐标投影函数. 但x^i作为求偏导的下标时，又作为坐标分量的偏导数符号. 之后会看到这样表达的好处. 从而

$$D_i(x^j)=\frac{\partial\hat{x}^j\circ\varphi\circ\varphi^{-1}}{\partial x^i}=\delta_{ij}. \tag{31}$$

从而验证线性无关。然后利用泰勒展开寻求每个D的表示. 具体来说，首先有$D(1)=0$. 其次，对$\forall f\in C^\infty(M)$, $\hat{f}=f\circ\varphi^{-1}:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$是光滑函数，从而由欧氏空间上的泰勒展开，有

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\boldsymbol{r})&=\hat{f}(0)+\nabla\hat{f}(0)\cdot\boldsymbol{r}+\boldsymbol{r}^T\nabla^2\hat{f}(\theta\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}\\
&=\hat{f}(0)+\sum_{i=1}^m\frac{\partial\hat{f}}{\partial x^i}|_{\mathbf{0}}\cdot x^i+\sum_{i,j=1}^m h_{ij}x^ix^j \quad \text{注意这里的}x^i\text{表示欧氏空间中关于原点的增量}\\
f&=f(p)+\sum_{i=1}^m\frac{\partial f\circ\varphi^{-1}}{\partial x^i}|_{\varphi(p)}\cdot x^i+\sum_{i,j}\tilde{h}_{ij}x^ix^j \quad \text{复合}\varphi\\
Df&=0+\sum_{i=1}^m D_i(f)\cdot D(\hat{x}^i)+\sum_{i,j}\tilde{h}_{ij}\big(D(x^i)x^j(p)+D(x^k)x^j(p)\big)
\end{aligned} \tag{32}$$

从而$Df=\sum_{i=1}^m D(x^i)D(f)$, 即$D=\sum_{i=1}^m D(x^i)D_i$. 因此$\{D_1,\cdots,D_m\}$是$\mathrm{Der}(C_p^\infty(M))$的基底，其维数为$m$.

2. 切向量与切空间

为表达简洁，把上述证明中的D_i记作$\frac{\partial}{\partial x^i}|_p$，将坐标卡映射省去.

我们将$\mathrm{Der}(C_p^\infty(M))$称为$M$在$p$处的切空间，记为$T_p(M)$. 同理，我们可以定义$\mathrm{Der}(C_p^k(M))$，注意其是无限维的，所以不具有实用性. 这时需要注意，记$\Gamma_p^k=\{\gamma:(-\varepsilon,\varepsilon)\to M;\gamma(0)=p\}$，则有

$$\left\{D_{\gamma'(0)}:C_p^k(M)\to\mathbb{R};\gamma\in\Gamma_p^k\right\}=\mathrm{span}(D_1,\cdots,D_n). \tag{33}$$

称$T_p(M)$中的元素为切向量，记为X_p. $\frac{\partial}{\partial x^i}|_p$是$T_p(M)$在坐标卡$(U,\varphi;x^i)$下的自然基底.

考虑到一个切向量与坐标表达无关，我们试图得到其在不同坐标下的转换公式.

定理(坐标变换公式). (i) 不同坐标卡基底之间的变换公式.

$$\frac{\partial}{\partial\tilde{x}^j}|_p=\sum_{i=1}^m\frac{\partial x^i}{\partial\tilde{x}^j}|_{\tilde{\varphi}(p)}\frac{\partial}{\partial x^i}|_p. \tag{34}$$

(ii) 同一个切向量在不同坐标卡下坐标的变换公式. 设$X_p=\sum_{i=1}^m X^i\frac{\partial}{\partial x^i}|_p=\sum_{i=1}^m\tilde{X}^i\frac{\partial}{\partial\tilde{x}^i}|_p$，则

$$\tilde{X}^j = \sum_{i=1}^{m} X^i \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i}|_{\varphi(p)} \tag{35}$$

证明：

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial \tilde{x}^j}|_p &= \frac{\partial f \circ \psi^{-1}}{\partial \tilde{x}^j}|_{\psi(p)} \\
&= \frac{\partial f \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \psi^{-1}}{\partial \tilde{x}^j}|_{\psi(p)} \\
&= \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f \circ \varphi^{-1}}{\partial x^i}|_{\varphi(p)} \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^j}|_{\psi(p)} \\
&= \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x^i}|_p \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^j}|_{\psi(p)}
\end{aligned} \tag{36}$$

■

下面利用对偶空间的性质得到一些有趣的结论. 我们只讨论光滑流形. 我们将$T_p(M)$的对偶空间记为$T_p^*(M)$，称为**余切空间**. 若$f \in C_p^\infty(M)$, 记$df_p \in T_p^*(M)$, 被称为f在p处的**微分**，定义为

$$df_p(X_p) = X_p(f), \forall X_p \in T_p(M). \tag{37}$$

余切空间的基底可通过对偶空间理论寻找. 取p处的某坐标卡下，$T_p(M)$的自然基底$\frac{\partial}{\partial x^i}|_p$, 取$f = x^i \in C_p^\infty(M)$, 即坐标分量函数，取其微分$dx_p^i \in T_p^*(M)$, 定义为

$$dx_p^i\left(\frac{\partial}{\partial x^j}|_p\right) = \frac{\partial x^i}{\partial x^j}|_p = \delta_j^i. \tag{38}$$

可知这是$T_p^*(M)$中的对偶基.

下面讨论切空间之间的关系.

定义(切映射). 若$f: M \to N$是光滑映射，$f(p) = q$. 定义$f_{*p}: T_p(M) \to T_q(N)$为

$$f_{*p}(X_p)(g) = X_p(g \circ f), \quad g \in C_q^\infty(N). \tag{39}$$

特别地，对于C^k流形，取$X_p = D_{\gamma'(0)}$, 则$f_{*p}(X_p) = D_{(f\circ\gamma)'(0)}$.

定义(切映射的对偶映射). $f_{*p}: T_p(M) \to T_q(N)$的对偶映射，记为$f_p^*: T_q^*(N) \to T_p^*(M)$，即

$$f_p^*(\theta_q)(X_p) = \theta_q(f_{*p}(X_p)), \quad \theta_q \in T_q^*(N). \tag{40}$$

3 切空间、切丛

这里的定义对应于对偶空间理论，便是对偶映射可直接典范定义为被作用泛函和原映射的复合. 可以回忆 Done right 中的

$$\begin{tikzcd}
T_pM \arrow[r, "f_{*p}"] \arrow[rr, bend left, dashed, "f_p^* = \theta_q \circ f_{*p}"] & T_qN \arrow[r, "\theta_q \in T_q^* N"] & \mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

对于$g \in C_q^\infty(M), dg_q \in T_q^*(N)$, 利用之前的微分的定义，有$f_p^*(dg_q) = d(g \circ f)_p$.

这里我们再看看有坐标卡情况下的具体表达.

定理(切映射的坐标表达). $f: M \to N$是光滑映射，$f(p) = q$. 取含p, q的坐标卡$(U, \varphi; x^i)$和$(V, \psi; y^i)$, $f(U) \subset V$. 则

$$f_{*p}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}|_p\right) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y^j}|_q \frac{\partial y^j}{\partial x^i}|_{\varphi(p)} \tag{41}$$

上面的结论本质上是链式法则的结果. 但是我们也可以从基底线性表示的角度来看待. 这样能够快速得到余切空间上有类似的坐标表达.

3 ▶ 切空间、切丛

定理(余切映射的坐标表达). $f:M\to N$是光滑映射，$f(p)=q$. 取含p,q的坐标卡$(U,\varphi;x^i)$和$(V,\psi;y^i)$, $f(U)\subset V$. 则

$$f_p^*\left(dy^j|_q\right)=\sum_{i=1}^{m}dx^i|_p\,\frac{\partial y^j}{\partial x^i}|_{\varphi(p)} \tag{42}$$

证明： 只需证明左右两边表达式在基上的作用相同. 取$\frac{\partial}{\partial x^k}\in T_pM$, 则有

$$\begin{aligned}
f_p^*(dy^j|_q)\left(\frac{\partial}{\partial x^k}|_p\right)&=dy^j|_q\left(f_{*p}\frac{\partial}{\partial x^k}|_p\right)=dy^j|_q\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial y^i}|_q\,\frac{\partial y^i}{\partial x^k}|_{\varphi(p)}\right)\\
&=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial y^i}{\partial x^k}|_{\varphi(p)}\;dy^j|_q\left(\frac{\partial}{\partial y^i}|_q\right)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial y^i}{\partial x^k}|_{\varphi(p)}\;\delta_{ij}\\
&=\frac{\partial y^j}{\partial x^k}|_{\varphi(p)}=\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial y^j}{\partial x^i}|_{\varphi(p)}\;\delta^i_k\\
&=\sum_{i=1}^{m}dx^i|_p\,\frac{\partial y^j}{\partial x^i}|_{\varphi(p)}\left(\frac{\partial}{\partial x^k}|_p\right)
\end{aligned} \tag{43}$$

■

3. 切丛

当p在M上移动时，T_pM是一族线性空间。设M是一个C^k流形$(k \geq 2)$, 定义$TM = \bigsqcup_{p\in M} T_pM$, 我们可以在$TM$上引入$C^{k-1}$微分结构。

定义(投影映射). $\pi : TM \to M$, 定义为

$$\pi(X_p) = p, \quad \forall X_p \in TM. \tag{44}$$

定义(在TM上引入拓扑结构). 取$(U, \varphi; x^i)$是M上的坐标卡，定义$\tilde{\varphi} : \pi^{-1}(U) \to \varphi(U) \times \mathbb{R}^m$如下，任取$p \in M$, X_p可被自然基底线性表达$X_p = \sum_{i=1}^m X^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_p$, 令$\tilde{\varphi}(X_p) = (\varphi(p), X^1, \cdots, X^m)$. 显然$\tilde{\varphi}$是双射. 利用上述映射，可以自然地在$TM$上引入拓扑结构，使得$\tilde{\varphi}$是同胚.

引理(在TM上引入坐标卡). 设$(U, \varphi; x^i), (V, \psi; y^i)$是$M$上$C^k$相容的坐标卡，则$\tilde{\psi} \circ \tilde{\varphi}^{-1}$是$C^{k-1}$同胚.

证明： 不妨设$p \in U \cap V \neq \emptyset$. $X_p \in T_pM$. 在两个坐标卡内可表示为$X_p = \sum_{i=1}^m X^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_p = \sum_{i=1}^m \tilde{X}^i \frac{\partial}{\partial y^i}|_p$. 并且有坐标变换公式$\tilde{X}^i = \sum_{j=1}^m X^j \frac{\partial y^i}{\partial x^j}$是$C^{k-1}$函数. 从而由

$$\tilde{\psi} \circ \tilde{\varphi}^{-1} : \tilde{\varphi}(\pi^{-1}(U \cap V)) \to \tilde{\psi}(\pi^{-1}(U \cap V)) \tag{45}$$

得到

$$\tilde{\psi} \circ \varphi(\varphi(p), X^1, \cdots, X^m) = (\psi(p), \tilde{X}^1, \cdots, \tilde{X}^m). \tag{46}$$

■

TM赋予如上的微分结构，被称为**切丛**。

4. 向量场、单参数变换群

下面的向量场X也被称为切丛TM的截面，其为每一个点p都指定了一个切向量。

定义(C^∞向量场). M是C^∞流形，$X: M \to TM$是C^∞映射，且$\forall p \in M, X(p) \in T_pM$, 则称$X$是$C^\infty$向量场.

定义(C^k向量场). 设M是C^k流形，若$X: M \to TM$是C^{k-1}映射，且$\pi \circ X = \mathrm{id}$, 则称$X$是$C^{k-1}$向量场.

反过来，我们有

定理(3). 设$X: M \to TM$, 且$\pi \circ X = \mathrm{id}$, 若$\forall f \in C^k(M), Xf \in C^{k-1}(M)$, 则$X$是$C^{k-1}$映射，即$C^{k-1}$向量场.

定义(单参数变换群). 设M是C^∞流形，$\varphi: \mathbb{R} \times M \to M$是$C^\infty$映射，记为$\varphi(t,p) = \varphi_t(p)$, 若其满足 (i) $\varphi_0(p) = p$, (ii) $\forall s, t \in \mathbb{R}, \varphi_s \circ \varphi_t = \varphi_{s+t}$, 则称$\varphi$为单参数变换群。

可以缩小$\mathbb{R} \times M$上的定义域，使得φ称为局部单参数变换群。

3 ▶ 切空间、切丛

定义(轨线). 设$\varphi: I_\varepsilon \times U \to M$是局部单参数变换群，给定一个$p\in U$, $\varphi(\cdot,p): I_\varepsilon \to M$被称为过$p$的轨线. 该轨线每一点对应的切向量为$X_p = D_{\varphi_0'(p)}$, 其称为$\varphi$诱导的向量场。

定义(积分曲线). 设$X: M\to TM$是C^∞向量场，若曲线$C: (-\varepsilon,\varepsilon)\to M$满足

$$X_{C(t)} = C_{*t}\frac{\partial}{\partial t} \in T_{C(t)}M, \quad \forall t\in(-\varepsilon,\varepsilon), \tag{47}$$

则称C是X的积分曲线.

对于由φ诱导的向量场X，我们有一个自然的结论。

定理(轨线即积分曲线). 设$\varphi: I_\varepsilon \times U \to M$是局部单参数变换群, X是其诱导的向量场，则轨线φ_t是X的积分曲线. 简单来说，就是向量场由单参数变换群的轨线的切向量诱导.

证明： 任取$p\in U$, 令$C(t)=\varphi_t(p)$, $t\in I_{\varepsilon_1}$是收缩过后的. 即证$X_{\varphi_t(p)} = C_{*t}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)$, $\forall t\in I_{\varepsilon_1}$. 任取$f\in C^\infty(M)$, 两边按照定义，引入求导变量$s$, 再利用单参数变换群的性质即可. 具体来说,

$$X_{\varphi_t(p)}(f) = \frac{d(f\circ\varphi_s\circ\varphi_t(p))}{ds}\Big|_{s=0} = \frac{d(f\circ C(t+s))}{ds}\Big|_{s=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(f\circ C(s))\Big|_{s=t} = C_{*t}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)(f) \tag{48}$$

■

3 ▶ 切空间、切丛

反过来，给定一个向量场，我们可以得到一个由其诱导的单参数变换群。其基础是常微分方程解的存在唯一性理论。

定理(向量场诱导的单参数变换群). 设X是C^∞流形M上的C^∞向量场，则$\forall p \in M$, 存在p的开邻域U, $\varepsilon > 0$, 以及单参数变换群$\varphi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times U \to M$, 使得$\varphi$诱导了$X$.

定理(单参数变换群作用于向量场). 设C^∞向量场X生成了单参数变换群φ_t, $\psi : M \to M$是C^∞自同胚，则$\psi_* X$生成了单参数变换群$\psi \circ \varphi_t \circ \psi^{-1}$.

证明： 只需证明$\psi \circ \varphi_t \circ \psi^{-1}$诱导了$\psi_* X$. 而$\forall p \in M$, $(\psi_* X)_p(f) = X_{\psi^{-1}(p)}(f \circ \psi) = X(f \circ \psi) \circ \psi^{-1}(p)$,

$$D_{(\psi \circ \varphi_t \circ \psi^{-1}(p))'(0)}(f) = \frac{d f \circ \psi \circ \varphi_t \circ \psi^{-1}(p)}{dt} |_{t=0} = D_{(\varphi_t)'(0)}(f \circ \psi) \circ \psi^{-1}(p) = X(f \circ \psi) \circ \psi^{-1}(p) \tag{49}$$

■

定理(推论). 设φ_t是局部单参数变换群，其诱导了向量场X, 则$(\varphi_t)_* X = X$.

例(). M是连通非紧流形，证明M上存在一个处处非零的向量场.

5. 李括号

定义(李括号). 设M是C^∞流形，X, Y是上面的两个C^∞向量场，定义

$$[X,Y]_p(f) = X_pY(f) - Y_pX(f), \quad f \in C^\infty(M), \tag{50}$$

即$[X,Y](f) = X(Yf) - Y(Xf)$, $[X,Y]$被称为X,Y的李括号.

引理(坐标表示). 设$(U,\varphi;x^i)$是坐标卡，$X|_U = X^i\frac{\partial}{\partial x^i}, Y|_U = Y^j\frac{\partial}{\partial x^j}$, 则

$$X^i\frac{\partial}{\partial x^i}\left(Y^j\frac{\partial f}{\partial x^j}\right) = X^i\left[\frac{\partial Y^j}{\partial x^i}\frac{\partial f}{\partial x^j} + Y^j\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}\right], \tag{51}$$

从而

$$\begin{aligned}
[X,Y](f) &= X^i \frac{\partial}{\partial x^i}\left(Y^j \frac{\partial f}{\partial x^j}\right) - Y^j \frac{\partial}{\partial x^j} X^i \frac{\partial f}{\partial x^i} \\
&= X^i \left[\frac{\partial Y^j}{\partial x^i}\frac{\partial f}{\partial x^j} + Y^j \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}\right] - Y^j \left[\frac{\partial X^i}{\partial x^j}\frac{\partial f}{\partial x^i} + X^i \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}\right] \\
&= X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i}\frac{\partial f}{\partial x^j} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j}\frac{\partial f}{\partial x^i} \\
&= X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i}\frac{\partial f}{\partial x^j} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i}\frac{\partial f}{\partial x^j} = \left[X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i}\right]\frac{\partial f}{\partial x^j}.
\end{aligned} \tag{52}$$

引理(李括号的性质). (i) $[X,Y] = -[Y,X]$, (ii) 线性性. $[aX_1 + bX_2, Y] = a_1[X_1,Y] + [X_2,Y]$, 另一种类似. (iii) $[[X,Y],Z] + [[Y,Z],X] + [[Z,X],Y] = 0$

证明： (iii) $[[X,Y],Z] = [X,Y]\circ Z - Z\circ[X,Y] = (X\circ Y - Y\circ X)\circ Z - Z\circ(X\circ Y - Y\circ X) = X\circ Y\circ Z - Y\circ X\circ Z + Z\circ X\circ Y - Z\circ Y\circ X$.

■

例(李括号与函数). 设$f,g\in C^\infty(M)$, X,Y是光滑向量场，求证$[fX,gY] = f(Xg)Y - g(Yf)X + fg[X,Y]$.

证明： 代入验证即可。$\forall h\in C^\infty(M)$,

$$\begin{aligned}[fX,gY]_p(h) &= (fX)_p(gY)(h) - (gY)_p(fX)(h) \\ &= f(p)\left[Y_p(h)X_p(g) + g(p)X_p(Yh)\right] - g(p)\left[X_p(h)Y_p(f) + f(p)Y_p(Xh)\right] \\ &= f(p)X_p(g)Y_p(h) - g(p)Y_p(f)X_p(h) + f(p)g(p)X_p(Yh) - f(p)g(p)Y_p(Xh) \\ &= \{f(Xg)Y - g(Yf)X + fg[X,Y]\}_p(h)\end{aligned} \tag{53}$$

■

设$f: M \to N$是C^∞同胚, X是M上的向量场，则f_*X是N上的向量场(每一点都唯一确定一个切向量)，定义$f_*X: f_*X(q) = f_{*f^{-1}(q)}\left(X_{f^{-1}(q)}\right) \in T_q(N)$, 从而

$$\left(f_*X\right)_q(g) = f_{*f^{-1}(q)}\left(X_{f^{-1}(q)}\right)(g) = X_{f^{-1}(q)}(g \circ f) = X(g \circ f) \circ f^{-1}(q). \tag{54}$$

引理(李括号的切映射). 设$f: M \to N$是C^∞同胚，则$f_*[X,Y] = [f_*X, f_*Y]$.

证明： 只需证任取$g \in C^\infty(N)$, 则有$f_{*p}[X,Y]_p(g) = [f_*X, f_*Y]_{f(p)}(g)$, 而LHS $= [X,Y]_p(g \circ f) = X_pY(g \circ f) - Y_pX(g \circ f)$,

$$\begin{aligned}\mathrm{RHS} &= (f_*X)_{f(p)}(f_*Y)(g) - (f_*Y)_{f(p)}(f_*X)(g) \\ &= (f_*X)_{f(p)}[Y(g\circ f)\circ f^{-1}] - (f_*Y)_{f(p)}[X(g\circ f)\circ f^{-1}] \\ &= X_p(Y(g\circ f)\circ f^{-1}\circ f) - Y_p(X(g\circ f)\circ f^{-1}\circ f) \\ &= X_pY(g\circ f) - Y_pX(g\circ f) = \mathrm{LHS}\end{aligned} \tag{55}$$

■

设φ_t是局部单参数变换群，其诱导了向量场X. 设Y是另一个C^∞向量场, 则有

定理(李括号与向量场). 令$W_t = (\varphi_t)_* Y$, 则W_t也是向量场，且$\frac{\mathrm{d}W_t}{\mathrm{d}t} = [W_t, X]$. 其实上式等价于在$t = 0$时成立，即$\frac{dW_t}{dt}|_{t=0} = [W_0, X] = \left[(\varphi_0)_* Y, X\right] = [Y, X]$，从而$(\varphi_t)_*[Y, X] = \left[(\varphi_t)_* Y, (\varphi_t)_* X\right] = [W_t, X]$

证明： $\forall f \in C^\infty(M)$,

$$\begin{aligned}\frac{dW_t}{dt}(f) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\varphi_t)_* Y(f) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[Y(f\circ\varphi_t)\circ\varphi_t^{-1}] \\ &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\left[Y(f\circ\varphi_{t+\Delta t})\circ\varphi_{t+\Delta t}^{-1} - Y(f\circ\varphi_t)\circ\varphi_t^{-1}\right]}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\left[Y(f\circ\varphi_{t+\Delta t})\circ\varphi_{t+\Delta t}^{-1} - Y(f\circ\varphi_t)\circ\varphi_{t+\Delta t}^{-1}\right]}{\Delta t} + \frac{\left[Y(f\circ\varphi_t)\circ\varphi_{t+\Delta t}^{-1} - Y(f\circ\varphi_t)\circ\varphi_t^{-1}\right]}{\Delta t} := \mathrm{I} + \mathrm{II}\end{aligned} \tag{56}$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{I} &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\left[\left(Y(f\circ\varphi_{t+\Delta t}) - Y(f\circ\varphi_t)\right)\circ\varphi_{t+\Delta t}^{-1}\right]}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\left[Y(f\circ\varphi_{t+\Delta t}) - Y(f\circ\varphi_t)\right]}{\Delta t}\circ\varphi_t^{-1} \\
&= Y\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(f\circ\varphi_t\circ\varphi_s)|_{s=0}\right)\circ\varphi_{-t} \\
&= Y(X(f\circ\varphi_t))\circ\varphi_{-t}
\end{aligned}
\tag{57}
$$

由于$(\varphi_s)_* X = X, \Leftrightarrow (\varphi_s)_* X(f) = X(f) \Leftrightarrow X(f\circ\varphi_s)\circ\varphi_s^{-1} = X(f) \Leftrightarrow X(f\circ\varphi_s) = X(f)\circ\varphi_s$, 从而$\mathrm{I} = Y(X(f)\circ\varphi_t)\circ\varphi_{-t} = (\varphi_t)_* Y(Xf) = W_t(Xf)$.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{II} &= -\frac{\left[Y(f\circ\varphi_t)\circ\varphi_{-t}\circ\varphi_{-\Delta t} - Y(f\circ\varphi_t)\circ\varphi_{-t}\right]}{-\Delta t} \\
&= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(Y(f\circ\varphi_t)\circ\varphi_{-t}\circ\varphi_s)|_{s=0} = -X(Y(f\circ\varphi_t)\circ\varphi_{-t}) = -X\Big((\varphi_t)_* Y(f)\Big) = -X(W_t f).
\end{aligned}
\tag{58}
$$

从而$\frac{dW_t}{dt}(f) = W_t(Xf) - X(W_t f) = [W_t, X](f)$.

■

6. 分布 Frobenius 定理

任给$p \in M$, T_pM可以取子空间D_p(维数r), 遍历所有的p, 可以得到类似切丛的结构$D = \sqcup_{p\in M} D_p$，其被称为r维分布. 若$\forall p \in M$, 存在p的开邻域U, 以及U上的向量场$X_1, \cdots, X_r$, s.t. $\forall q \in U$, $D_q = \mathrm{span}(X_1(q), \cdots, X_r(q))$, 则称$D$在$U$上由$X_1, \cdots, X_r$生成。

定义(积分流形). 设$i : W \to M$是浸入子流形，若$\forall p \in M$, $i_{*p}(T_pW) \subset D_{i(p)} \subset T_{i(p)}M$, 则称$i(W)$是$D$的积分流形.

定义(完全可积). 设D是r维分布，若$\forall p \in M$, $\exists p$的坐标邻域$(U, \varphi; x^i)$, s.t. $\forall \vec{C} = c_i \in \mathbb{R} (i = r+1, \cdots, m)$, $U_{\vec{C}} = \{x^i = c_i : i = r+1, \cdots, m\}$是$D$的积分流形，则称分布$D$**完全可积**.

由定义可知，若分布D完全可积，则$\forall p \in M$, 存在p的开邻域U, 以及U上的向量场$X_1 = \frac{\partial}{\partial x^1}, \cdots, X_r = \frac{\partial}{\partial x^r}$, s.t. $\forall q \in U$, $D_q = U_{\vec{C}} = \mathrm{span}(X_1(q), \cdots, X_r(q))$, 这是因为对于任意的$v \in D_q$, 其作用坐标分量函数$x^{r+1}, \cdots x^m$都为0, 从而其线性表出的系数为0. 另外，我们注意到，此时

$$[X_i, X_j] = 0, \quad i, j = 1, \cdots, r. \tag{59}$$

这是因为

3 ▶ 切空间、切丛

$$[X_i, X_j](f) = \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial f}{\partial x^j}\right) - \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right) = 0. \tag{60}$$

定义(对合). 称r维分布D是**对合**的，若$\forall p \in M, \exists p$的开邻域$U$, 以及生成$D$的向量场$X_1, \cdots, X_r$, 满足$[X_i, X_j](q) \in D_q, \forall q \in U, i, j = 1, \cdots, r$.

注意对合与向量场的选取无关. 不妨设$X_1', \cdots, X_r'$是另一组生成D的向量场，则$X_i' = a_i^j X_j, a_i^j \in C^\infty(U)$, 于是$[X_i', X_j'] = [a_i^k X_k, a_j^l X_l] = a_i^k (X_k a_j^l) X_l - a_j^l (X_l a_i^k) X_k + a_i^k a_j^l [X_k, X_l]$, 于是$\forall q \in U$, $[X_i', X_j'](q) \in D_q$.

下面给出初始版本的 Frobenius 定理.

定理(Frobenius 定理). r维分布D是完全可积的，当且仅当D是对合的.

证明： 必要性易证. 为证明充分性，先引入两个引理.

■

引理(对合的分布的性质). 设分布D的对合的，则$\forall p \in M, \exists p$的开邻域$U$, 以及$U$上的向量场$X_1, \cdots, X_r$生成$D$, 使得$[X_i, X_j] = 0, i, j = 1, \cdots, r$.

证明： 根据对合的定义，$\forall p\in M,\exists p$的坐标卡$(U,\varphi;x^i)$, 以及U上的向量场$Y_1,\cdots,Y_r$生成D, 此时$Y_a=Y_a^i\frac{\partial}{\partial x^i}$, 其中$Y_a^i\in C^\infty(U),a=1,\cdots,r,$注意求和指标$i=1,\cdots,m$. 由生成基的定义，$\det(Y_a^b)_{1\le a,b\le r}\neq 0$. 不妨定义$A=[Y_a^b],B=A^{-1}=[Z_a^b]$, 构造

$$X_i=Z_i^jY_j=Z_i^jY_j^k\frac{\partial}{\partial x^k}=\sum_{k=1}^{r}+\sum_{k=r+1}^{m}Z_i^jY_j^k\frac{\partial}{\partial x^k}=\frac{\partial}{\partial x^i}+\sum_{k=r+1}^{m}Z_i^jY_j^k\frac{\partial}{\partial x^k}:=\frac{\partial}{\partial x^i}+\sum_{k=r+1}^{m}X_i^k\frac{\partial}{\partial x^k}. \tag{61}$$

从而

$$\begin{aligned}
[X_a,X_b]&=\left[\frac{\partial}{\partial x^a}+\sum_{k=r+1}^{m}X_a^k\frac{\partial}{\partial x^k},\frac{\partial}{\partial x^b}+\sum_{k=r+1}^{m}X_b^k\frac{\partial}{\partial x^k}\right]\\
&=\left[\frac{\partial}{\partial x^a},\frac{\partial}{\partial x^b}\right]+\left[\frac{\partial}{\partial x^a},\sum_{k=r+1}^{m}X_b^k\frac{\partial}{\partial x^k}\right]+\left[\sum_{k=r+1}^{m}X_a^k\frac{\partial}{\partial x^k},\frac{\partial}{\partial x^b}\right]+\left[\sum_{k=r+1}^{m}X_a^k\frac{\partial}{\partial x^k},\sum_{k=r+1}^{m}X_b^k\frac{\partial}{\partial x^k}\right]\\
&=0+\sum_{k=r+1}^{m}\left\{\frac{\partial X_b^k}{\partial x^a}\frac{\partial}{\partial x^k}+X_b^k\left[\frac{\partial}{\partial x^a},\frac{\partial}{\partial x^k}\right]\right\}+\sum_{k=r+1}^{m}\left\{-\frac{\partial X_a^k}{\partial x^b}\frac{\partial}{\partial x^k}+X_a^k\left[\frac{\partial}{\partial x^k},\frac{\partial}{\partial x^b}\right]\right\}+\left[\sum_{k=r+1}^{m}X_a^k\frac{\partial}{\partial x^k},\sum_{k=r+1}^{m}X_b^k\frac{\partial}{\partial x^k}\right]\\
&=\sum_{k=r+1}^{m}\left\{\frac{\partial X_b^k}{\partial x^a}\frac{\partial}{\partial x^k}-\frac{\partial X_a^k}{\partial x^b}\frac{\partial}{\partial x^k}\right\}+\left[\sum_{k=r+1}^{m}X_a^k\frac{\partial}{\partial x^k},\sum_{k=r+1}^{m}X_b^k\frac{\partial}{\partial x^k}\right]\in\operatorname{span}\left(\frac{\partial}{\partial x^k},k=r+1,\cdots,m\right)
\end{aligned} \tag{62}$$

然而由于对合的定义，$[X_a,X_b](q)\in D_q=\operatorname{span}(X_1(q),\cdots,X_r(q))$，从而$[X_a,X_b](q)=0,\forall q\in U,a,b=1,\cdots,r.$

■

于是由上面的证明，$X_1, \cdots, X_r, \frac{\partial}{\partial x^{r+1}}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^m}$线性无关. 记$X_i$生成的单参数变换群为$\sigma_i : (-\varepsilon, \varepsilon) \times W \to U, W \subset U$.

由 Lie 导数性质，若$\left[X_i, X_j\right] = 0, \forall 1 \leq i, j \leq r$, 则$(\sigma_i(t))_* X_j = X_j$，从而$\sigma_i(t)$与$\sigma_j(t)$可交换.

于是可以开始定理的证明.

证明： 定理的证明. 取引理中的坐标卡$(U, \varphi; x^i)$, 以及引理中的$X_1, \cdots, X_r$, $\sigma_i(t)$是X_i诱导的单参数变换群. 令$C_\varepsilon = (-\varepsilon, \varepsilon)^m$, 定义$\lambda : C_\varepsilon \to U$为

$$\lambda(t^1, \cdots, t^r, x^{r+1}, \cdots, x^m) = \sigma_1(t^1) \circ \cdots \circ \sigma_r(t^r)\left(\varphi^{-1}\left(\underbrace{0, \cdots, 0}_{r}, x^{r+1}, \cdots, x^m\right)\right) \tag{63}$$

显然$\lambda_{*0}\left(\frac{\partial}{\partial t^i}|_0\right) = D_{\sigma_i(t^i)(p)'(0)} = X_i(p)$, $\quad i = 1, \cdots, r$, $\lambda_{*0}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}|_0\right) = D_{\varphi^{-1}(0,\cdots,0,x^i,0,\cdots,0)'(0)} = \frac{\partial}{\partial x^i}|_p$, $\quad i = r+1, \cdots, m$, 从而局部上λ^{-1}是坐标卡. 而在$(U, \lambda^{-1}; y^i)$中，$X_i = \frac{\partial}{\partial y^i}, i = 1, \cdots, r$.

从而实现了拉直.

■

浙江大学
ZHEJIANG UNIVERSITY

Thank You For Listening!